ФУНКЦИЯ. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется функцией и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \to Y$. Говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y.

Множество X называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

Пусть задана функция $f : X \to Y$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т.е. $X \subset R$ и $Y \subset R$), то функцию f называют числовой функцией, для краткости будем именовать их просто функциями и записывать $y = f(x)$.

Переменная x называется при этом аргументом или независимой переменной (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости.

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X.

Определение. Точка $a-$ называется предельной точкой множества X или точкой сгущения множества X, если в любой окрестности $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ существует точка из множества X, отличная от a ($x \in X$ и $x \neq a$), т.е $\exists x \in (a-\varepsilon;\ a+\varepsilon) \cap X,\ x \neq a.$

Эквивалентно этому определению: точка a–называется предельной точкой множества X, если существует последовательность $\{a_n\} \in X$, $a_n \neq a$, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Точка $a-$ может принадлежать множеству X, может и нет.

Например, для множества $X = [a;\ b)-$ все точки являются предельными, включая a и b, здесь $a \in X$, но $b \notin X$. Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и $a-$ предельная точка для множества X.

Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любой последовательности аргумента x_n, $n \in N$, $x_n \in X$ $(x_n \neq a)$, сходящейся к точке a (т.е $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$, сходится к числу A (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Это определение коротко можно записать так:

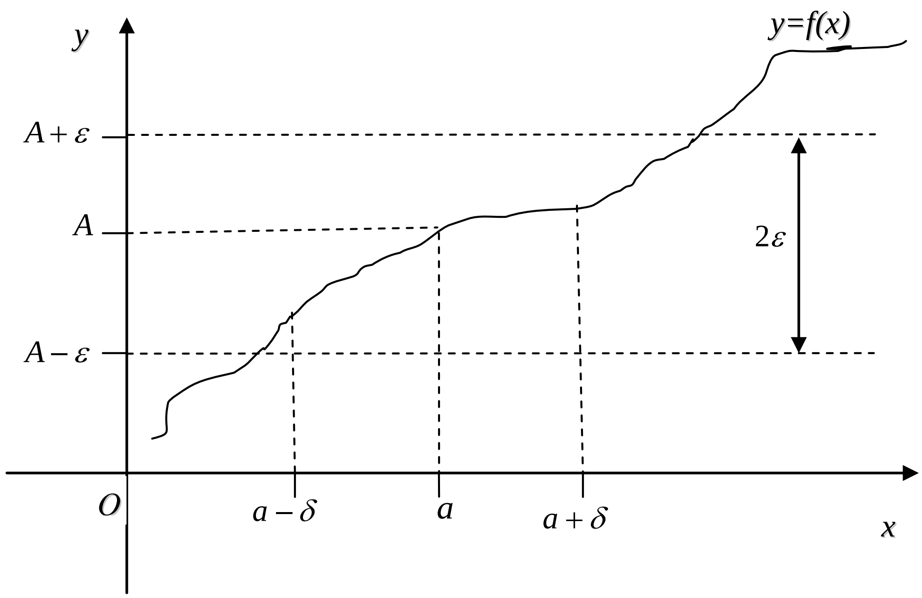
$$\forall x_n \in X,\ x_n \neq a,\quad x_n \to a \quad f(x_n) \to A \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Определение 2 (на «языке $\varepsilon-\delta$», или по Коши). Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq a$, $x \in X$ удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Это определение коротко можно записать так:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon;\ a) > 0,\ \forall x:\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Геометрический смысл предела функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$. Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε и a, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon, a)$.



Отрицание определения 1 (по Гейне).

$\exists x_n \to a,\ x_n \neq a,\ \ x_n \in X$ что $f(x_n) \not\to A$.

Отрицание определения 2 (по Коши).

$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \ \forall \delta > 0,\ \exists x' \in X:\ 0 < |x'-a| < \delta$ но $|f(x')-A| > \varepsilon_0$.

Теорема. Определение 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство. Докажем сперва, что из определения 1 следует определение 2. Доказательство проведем от противного: пусть имеет место определение по Гейне, но не имеет место определение по Коши, т.е. $\forall \delta > 0,\ \exists x':\ 0 < |x'-a| < \delta$ *но* $|f(x')-A| > \varepsilon_0$. Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, и как было уже отмечено $\exists x_n$, что $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ *но* $|f(x_n)-A| > \varepsilon_0$. Из условия $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n} \Rightarrow$, что $x_n \to a$, и $x_n \neq a$. Из того, что $|f(x_n)-A| > \varepsilon_0 \Rightarrow f(x_n) \not\to A$. Мы построили последовательность x_n, которая не равна a, $x_n \to a$ а $f(x_n) \not\to A$, что противоречит определению Гейне.

Обратное. Пусть имеет место определение Коши, докажем, что имеет место определение по Гейне тоже. Возьмем любую последовательность $x_n \to a$ и $x_n \neq a$, тогда для

$\forall \varepsilon > 0$, по которому подберем некоторое число $\delta > 0$, что $\forall x:\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Возьмем данное число δ. Так как $x_n \to a$, то для данного δ можно найти такой номер $N = N(\delta) = N(\varepsilon)$, что $0 < |x_n - a| < \delta\ \forall n > N$. Если $|x_n - a| < \delta$ для $\forall n > N$, тогда по определению Коши $|f(x_n) - A| < \varepsilon,\ \forall n > N$. Итак, мы нашли такой номер $N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N\ |f(x_n) - A| < \varepsilon \quad \Rightarrow\ f(x_n) \to A \Rightarrow$, что выполняется определение по Гейне.

Лемма. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Если $A \neq 0$, тогда $\exists$ окрестность $(a - \delta_0,\ a + \delta_0)$, что $\forall x,\ x \neq a$ и $x \in (a - \delta_0,\ a + \delta_0)$, то $f(x) \neq 0$.

Доказательство: Пусть $A > 0$. Обозначим $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$. Тогда для данного ε $\exists \delta_0$, что $\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta_0$, $|f(x) - A| < \varepsilon$, это значит что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, т.е. $\dfrac{A}{2} < f(x) < \dfrac{3A}{2} \Rightarrow$ $f(x) \neq 0$, т.к. $f(x) > 0$.

Предел функции при $x \to \infty$**.**

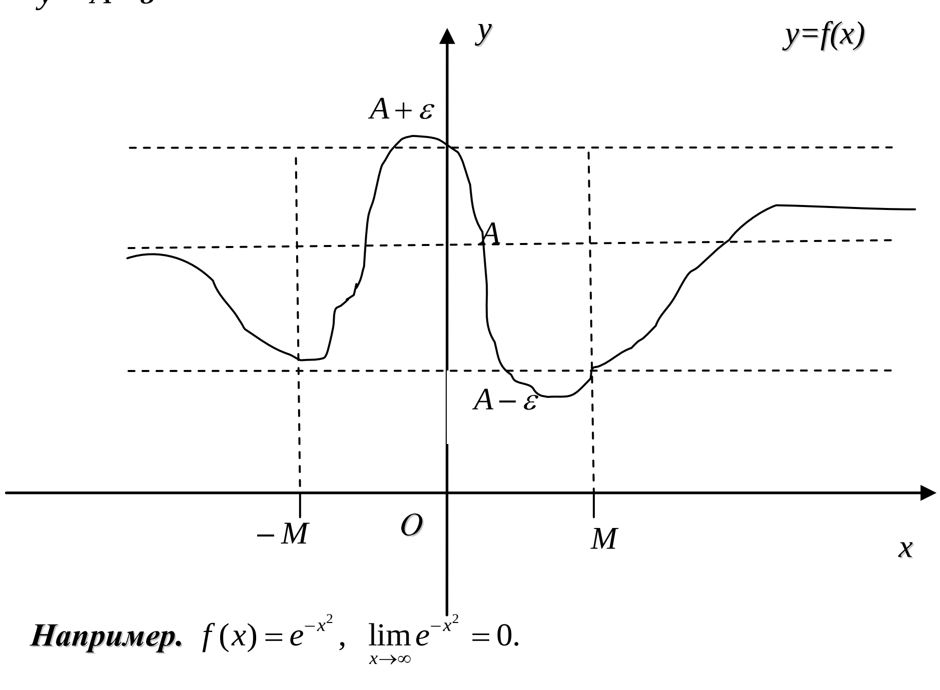
Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty;\ +\infty)$.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε найдется такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это определение коротко можно записать так:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x:\ |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Если $x \to +\infty$, то пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, если $x \to -\infty$, то – $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$. Геометрический смысл этого определения таков: для $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0$, что при $x \in (-\infty;\ -M)$ или при $x \in (M;\ +\infty)$ соответствующие значения функции $y = f(x)$ попадут в ε-окрестность точки A, т.е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$



Например. $f(x) = e^{-x^2}$, $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0$.

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОШИ ДЛЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ при $x \to a$ имела конечный предел, т.е. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon;\ a) > 0$, что для $\forall x';\ x''$, которые находятся в проколотой $\delta -$окрестности точки a т.е. $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, то $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Доказательство:

Необходимость. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда, для $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$, что $\forall x$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Берем $\forall x',\ x''$ такие, что:

$0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, тогда $|f(x') - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x'') - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно

$$|f(x'') - f(x')| = |(f(x'') - A) + (-f(x') + A)| \le |f(x'') - A| + |A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Достаточность. Используем определение понятия предела функции на «языке последовательностей». Пусть условие, сформулированное в теореме, выполнено, и по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ установлено соответствующее $\delta > 0$, такое, что выполняется условие теоремы.

Сперва докажем, что если $\{x_n\}$ есть любая последовательность значений из X, сходящаяся к a, т.е. $\forall x_n \ne a,\ x_n \to a,$ то последовательность $f(x_n)$ имеет предел, т.е. существует некоторое число b, что $f(x_n) \to b$.

По условию теоремы имеем, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, $\forall x',\ x''$, $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, $\Rightarrow$ $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Берем произвольную последовательность, такую, что $x_n \to a$, $x_n \ne a$. Тогда, для данного числа δ существует номер $\exists N = N(\delta)$, что $\forall n > N$, $0 < |x_n - a| < \delta$. Так как при $n > N$, для любого $p = 1, 2, ...$ $n + p$ тоже больше чем N $(n + p > N)$, то $0 < |x_{n+p} - x_n| < \delta$. Тогда в условиях теоремы, подбирая $x' = x_n,\ x'' = x_{n+p}$, имеем, что $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$, т.е. $\{f(x_n)\}$ фундаментальная последовательность, и следовательно имеет предел.

Теперь покажем, что для любой последовательности $\{x_n\} \in D(f)$, $x_n \to a,\ x_n \ne a,$ предел последовательности $\{f(x_n)\}$, который существует, это одно и то же число.

Пусть это не так, т.е. существуют хотя бы две последовательности:

$x_n \ne a,\ x_n \to a,\ f(x_n) \to b_1,$

$y_n \ne a,\ y_n \to a,\ f(y_n) \to b_2$ и $b_1 \ne b_2$.

Рассмотрим новую последовательность: $z_n = \begin{cases} x_n, & n = 2k \\ y_n, & n = 2k+1 \end{cases}$, тогда $z_n \ne a,\ z_n \to a$.

Так как $z_n \ne a,\ z_n \to a,$ то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$, но с другой стороны предел последовательности $\{f(z_n)\}$ не существует, т.к. существуют две *подпоследовательности* $f(z_{2k}) = f(x_{2k}) \to b_1$.

$f(z_{2k+1}) = f(y_{2k+1}) \to b_2, \quad b_1 \neq b_2$ (т.е. для последовательности $\{f(z_n)\}$ существуют два различных частных предела)$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ не существует, что противоречит тому факту, что если $\forall z_n \neq a,\ z_n \to a$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ФУНКЦИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ПРЕДЕЛ

Пусть имеем функции $f(x)$ и $g(x)$, которые определены на множестве X, и a предельная точка множества X, и пусть c некоторое постоянное число, тогда если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то

1) $\exists \lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot A$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$;

4) если $B \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Все эти свойства сводятся к соответствующим свойствам сходящихся последовательностей, если использовать определение по Гейне.

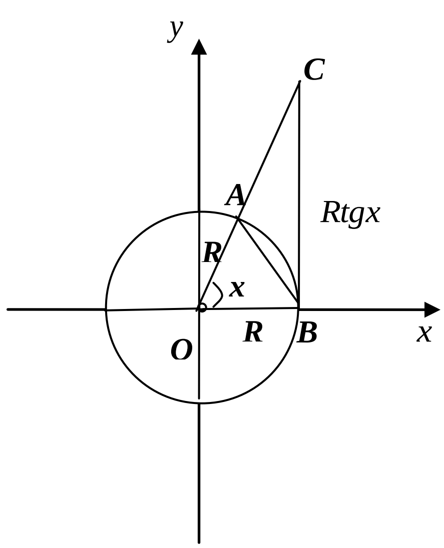
Докажем свойство 3:

Доказательство: возьмем любую последовательность $x_n \to a,\ x_n \neq a$, по Гейне $f(x_n) \to A,\ g(x_n) \to B$, тогда по свойству сходящихся последовательностей имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\cdot g(x_n) = A\cdot B$;

Докажем свойство 4:

Доказательство: если $f(x_n) \to A,\ g(x_n) \to B$ и $B \neq 0$, то начиная с некоторого номера $g(x_n) \neq 0$ и по свойству сходящихся последовательностей имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{A}{B}$.

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ



1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. Рассмотрим окружность радиуса R. Если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то сравнивая площади двух треугольников и сектора имеем: $S_{\Delta AOB} < S_{сектораAOB} < S_{\Delta COB}$

Если через x обозначить радианную меру угла $\angle\ AOB$, то эти неравенства перепишутся так:

$$\frac{R^2 \sin x}{2} < \frac{R^2 x}{2} < \frac{R^2 tgx}{2}.$$

$$\text{т.к. } S_{сектораAOB} = R^2 \cdot \frac{x}{2}$$

$$\sin x < x < tgx,\ x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$0 < \frac{x}{\sin x} - 1 < \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

$$0 < \frac{x}{\sin x} - 1 < \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x}$$

Пусть $x < \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x > \dfrac{1}{2}$ и т.к. $\sin\dfrac{x}{2} < \dfrac{x}{2}$, то имеем

$$0 < \frac{x}{\sin x} - 1 < x^2, \text{ и т.к. } x^2 \to 0 \Rightarrow \frac{x}{\sin x} - 1 \to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Доказательство. Пусть $x > 0$. Подберем n следующим образом: $n \le x < n+1$, откуда следует: $\dfrac{1}{n} \ge \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{n+1} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{n+1} < 1 + \dfrac{1}{x} \le 1 + \dfrac{1}{n}$. Тогда имеем

$\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, т.к. обе части данного неравенства при $n \to \infty$

$\to e$, то существует $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e.$. Следовательно,

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}k} = e^k.$ Аналогично: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Бесконечно малые функции. **Определение.** Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (в точке a), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

По определению предела функции равенство $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ означает: для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Это определение коротко можно записать так:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Например, $\alpha(x)=x-a,\quad \alpha(x)=(x-a)^n$ – бесконечно малые при $x\to a$.

Классификация бесконечно малых функций. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бесконечно малые функции при $x\to a$.

Определение. Функция $\alpha(x)$ является *бесконечно малой более высокого порядка при* $x\to a$, чем $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Обозначается так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to a$.

Например, $\alpha(x)=(x-a)^n,\quad \beta(x)=x-a$.

Определение. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка при* $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k\neq 0$, где $-\infty<k<+\infty$.

Обозначается так: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ при $x\to a$.

Например, $\alpha(x)=\sin mx,\quad \beta(x)=\sin nx$.

Определение. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми при* $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

Например, $\alpha(x)=\sin^2 x,\quad \beta(x)=x^2$.

При вычислении пределов часто используется следующая таблица эквивалентных функций:

Эквивалентность при $x\to 0$	Равенство при $x\to 0$
$\sin x\sim x$	$\sin x=x+o(x)$
$tgx\sim x$	$tgx=x+o(x)$
$\arcsin x\sim x$	$\arcsin x=x+o(x)$
$arctgx\sim x$	$arctgx=x+o(x)$
$e^x-1\sim x$	$e^x-1=x+o(x)$
$\ln(1+x)\sim x$	$\ln(1+x)=x+o(x)$
$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$	$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)$
$a^x-1\sim x\ln a$	$a^x=1+x\ln a+o(x),\ a>0,\ a\neq 1$

Бесконечно большая функция (б.б.ф.) **Определение.** Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ существует $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Это определение коротко можно записать так:
$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-5}$ есть б.б.ф. при $x \to 5$.

Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$ и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; если лишь отрицательные значения, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Бесконечно большая функция при $x \to \infty$**.**

Определение. Функция $y = f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется бесконечно большой при $x \to \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $N = N(M) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Это определение коротко можно записать так:
$\forall M > 0\ \exists N > 0\ \forall x: |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$.

Например, функция $y = 3^x$ есть б.б.ф. при $x \to +\infty$.

Некоторые замечательные пределы. Вычисление пределов во многих случаях производится с помощью двух важных формул:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Часто используются также следующие формулы, являющиеся следствием формулы 2:

3. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,\ \alpha \in R$,
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a (1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$, $a > 0,\ a \neq 1$,
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$.

В частности, при $a = e$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Определение. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ справа в точке a (или при $x\to a+0$), если:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon;\ a)>0,\ \forall x:\ 0<x-a<\delta\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=A.$$

Определение. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ слева в точке a (или при $x\to a-0$), если:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon;\ a)>0,\ \forall x:\ 0<-(x-a)<\delta\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)=A.$$

Например, вычислим односторонние пределы функции $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ в точке $x_0=0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\operatorname{sgn}x=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\operatorname{sgn}x=-1$, т.е. односторонние пределы для функции $f(x)=\operatorname{sgn}x$ в точке $x_0=0$ существуют, но не равны между собой.

Очевидно, что если предел $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)$, то существуют односторонние пределы (предел справа и предел слева) и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$.

Теорема. Для того чтобы $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)$ необходимо и достаточно чтобы $\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)$, $\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$.

Доказательство:

Необходимость: Пусть $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,$ что $\forall x:\ 0<|x-a|<\delta\ \ \left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$ и

$0<|x-a|<\delta$ то $0<x-a<\delta$ или $0<a-x<\delta$ $\Rightarrow$ односторонние пределы тоже существуют и равны.

Достаточность: так как $\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)$, $\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$, то

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon;\ a)>0,\ \forall x:\ 0<x-a<\delta_1\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ и

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2=\delta_2(\varepsilon;\ a)>0,\ \forall x:\ 0<a-x<\delta_2\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Берем $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$, тогда

$\forall x:\ 0<|x-a|<\delta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x-a<\delta_1\\ 0<a-x<\delta_2\end{array}\right.$, следовательно $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Таким образом, функция $f(x)=\operatorname{sgn}x$ в точке $x_0=0$ не имеет предела, т.к. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности.

Определение непрерывности в точке. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение непрерывности по Коши. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon;\ x_0) > 0$, что $\forall x \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если $x = x_0$, то $f(x) - f(x_0) = 0$, т.е. здесь x может приравниваться к x_0.

Равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;
2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение непрерывности по Гейне. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\forall x_n$, $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to f(x_0)$.

Замечание. x_n может и принимать значение x_0.

Отрицание непрерывности. Функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, если $\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta,\ \exists x',\ |x' - x_0| < \delta$, но $|f(x') - f(x_0)| > \varepsilon_0$.

Отрицание непрерывности по Гейне. Функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, если $\exists x_n \to x_0$, для которой $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Лемма. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$ (т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$), то существует δ-окрестность точки x_0 где $f(x) \neq 0$ (т.е. $\forall \delta > 0\ \exists (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, что $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, $f(x) \neq 0$) .

Доказательство: Пусть $f(x_0) > 0$. Берем $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, т.к.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то при $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \exists (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, что $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$,

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2} > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ ч.т.д.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД НЕПРЕРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные в точке x_0 функции, тогда:

? $c \cdot f(x)$ – непрерывная в точке x_0 функция, где c – любое постоянное число;

? $f(x) \pm g(x)$ – непрерывная в точке x_0 функция;

? $f(x) \cdot g(x)$ – непрерывная в точке x_0 функция;

? если $g(x_0)\neq 0$, то $\exists\delta(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, $g(x)\neq 0\ \ \forall x$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – непрерывная в точке x_0 функция.

Доказательство всех свойств следует из соответствующих свойств предела. Докажем последнее свойство.
Если $g(x_0)\neq 0$, то $\exists\delta(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, где $g(x)$ нигде не обращается в ноль, это следует из предыдущей леммы. Пусть последовательность $x_n\to x_0$, $f(x_n)\to f(x_0)$, $g(x_n)\to g(x_0)\neq 0$.
Из свойства последовательностей следует, что $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

ОДНОСТОРОННЯЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Из определения непрерывности следует, что $f(x)$ непрерывна, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon;\ x_0)>0$, что $\forall x\quad |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Определение 1. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon;\ x_0)>0$, что $\forall x\quad x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Это записывается так $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)=f(x_0)$ или $f(x_0+0)=f(x_0)$.

Определение 1. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева, если
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon;\ x_0)>0$, что $\forall x\quad x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Это записывается так $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x)=f(x_0)$ или $f(x_0-0)=f(x_0)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то данная функция непрерывна и справа, и слева. И, наоборот, для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна и справа, и слева. Такое понятие непрерывности позволяет выделить точки разрыва.

Исследуем на одностороннюю непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0.

Пример1. $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ $x_0=0$;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\operatorname{sgn}x=1\neq f(0)$ откуда следует, что $f(x)$ не является непрерывной справа в точке x_0;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\operatorname{sgn}x=-1\neq f(0)$ откуда следует, что $f(x)$ не является непрерывной слева в точке x_0;

Пример2. $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ $x_0=0$;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1=f(0)$ откуда следует, что $f(x)$ является непрерывной справа в точке x_0;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-1\neq f(0)$ откуда следует, что $f(x)$ не является непрерывной слева в точке x_0;

Пример3. $f(x)=[x],\quad x_0=n;\ n\in Z,$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}}[x]=n=f(n)$ откуда следует, что $f(x)$ является непрерывной справа в точке x_0;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}}[x]=n-1\neq f(n)$ откуда следует, что $f(x)$ не является непрерывной слева в точке x_0.

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Определение. Пусть функция f определена на множестве A и принимает значения из B $(f:A\to B)$, а функция g определена на множестве B и принимает значения из C $(g:B\to C)$, тогда функция $h(x)$ $(h:A\to C)$ по следующему правилу $h(x)=g(f(x))$ называется сложной функцией.

Например, $f(x)=\sin x,\ g(x)=x^2\Rightarrow h(x)=g(f(x))=\sin^2 x.$

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то сложная функция $h(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство: доказательство проведем с помощью определения по Гейне.

Непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает, что $\forall x_n,\ x_n\to x_0\ \Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)=y_0$; непрерывность функции $g(y)$ в точке y_0 означает, что $\forall y_n,\ y_n\to y_0\ \Rightarrow g(y_n)\to g(y_0)$. Доказать, что $h(x)$ непрерывна в точке x_0, означает доказать, что $\forall x_n,\ x_n\to x_0$ $\Rightarrow h(x_n)\to h(x_0)$. Возьмем любую последовательность $x_n\to x_0$. Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что $\Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)$. Обозначим $f(x_n)$ через y_n. Из того, что $y_n\to y_0$ $\Rightarrow g(y_n)\to g(y_0)\Rightarrow g(f(x_n))\to g(f(x_0))\Rightarrow h(x_n)\to h(x_0)$. ч.т.д.

ПОНЯТИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Определение. Пусть имеем функцию f, которая определена на множестве X и удовлетворяет следующему свойству:

$\forall\ x_1,x_2\in X,\ x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, такие функции называются *взаимнооднозначными*.

Для таких функций вводится понятие обратной функции :

пусть $f:X\to Y$, $g:Y\to X$, $g(f(x))=x$. Функция g называется обратной функцией функции f, а f – обратимой функцией: $g=f^{-1}$. Таким образом, для того, чтобы функция f была обратима, необходимо и достаточно, чтобы она была взаимнооднозначной.

Например, функция $f(x)=x^2$ определена на интервале $(-\infty;\ +\infty)$, но для того, чтобы ввести понятие обратной функции необходимо рассмотреть функцию либо на полуинтервале $(-\infty;\ 0]$, либо – $[0;\ +\infty)$, где функция $f(x)=x^2$ будет взаимнооднозначной, и следовательно обратимой.

Определение. Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей (убывающей), если $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ $(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2))$. Монотонно убывающие или возрастающие функции называтся монотонными.

Таким образом, если функция монотонна, то она взаимнооднозначна, следовательно, обратима.

Лемма. Для любой монотонной функции всегда существует обратная функция, причем если $f\uparrow$, то $f^{-1}\uparrow$, и если $f\downarrow$, то $f^{-1}\downarrow$.

Доказательство: Если $f(x)\uparrow$, то $\Rightarrow \forall x_1,\ x_2;\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Докажем, что $g(y)=f^{-1}(y)\uparrow$. Пусть $y_1<y_2, \exists x_1,\ x_2$ *что* $y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2)$, *но* $g(y_1)\ge g(y_2)$. $g(y_1)=f^{-1}(f(x_1))=x_1,\ g(y_2)=f^{-1}(f(x_2))=x_2$. Получили, что $x_1\ge x_2$, но отсюда $\Rightarrow$ *что* $f(x_1)\ge f(x_2)$, *т.е.* $y_1\ge y_2$, пришли к противоречию.

Теорема. Если монотонная функция определена и непрерывна на множестве X, $f: X\to Y$, то f^{-1}, $f^{-1}: Y\to X$, тоже будет монотонной и непрерывной, причем если $f\uparrow$, то $f^{-1}\uparrow$, и если $f\downarrow$, то $f^{-1}\downarrow$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если в каждой точке множества X она непрерывна.

В силу того, что сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю), из непрерывности функции $f(x)=x$ вытекает непрерывность следующих функций:

1) $f(x)=C\cdot x$;

2) $f(x)=x^n,\ n\in N$;

3) $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, функция ***многочлен,*** непрерывная функция на интервале $(-\infty;\ +\infty)$.

4) $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, отношение двух многочленов называется ***рациональной функцией***, которая определена и непрерывна там, где $Q_m(x)\ne 0$.

Тригонометрические функции.

Рассмотрим функцию $y=\sin x$ и докажем, что она непрерывна на интервале $(-\infty;\ +\infty)$.

Доказательство: доказать, что функция $y=\sin x$ непрерывна в точке x_0, $x_0\in R$, значит:

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|,$$

$\left|\sin x - \sin x_0\right| < \left|x - x_0\right| < \varepsilon,\ \ \left|x - x_0\right| < \delta = \varepsilon \Rightarrow$ что функция $y = \sin x$ непрерывна на интервале $(-\infty;\ +\infty)$.

Функция $y = \cos x$ непрерывна на интервале $(-\infty;\ +\infty)$, т.к. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ как сложная функция – непрерывна.

Функция $y = \ tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна там, где $\cos x \neq 0$.

Обратные тригонометрические функции.

Рассмотрим функцию *y=sinx* на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке функция *y=sinx* монотонно возрастает, и следовательно, обратима. Обозначим эту функцию через *arcsinx*. Таким образом, функция *y=arcsinx* является обратной к функции *y=sinx* на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. $D(\arcsin x) = [-1;1]$, $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Рассмотрим функцию *y=cosx* на отрезке $[0;\pi]$. На этом отрезке функция *y=cosx* монотонно убывает, и следовательно, обратима. Обозначим эту функцию через *arccosx*. Таким образом, функция *y= arccosx* является обратной к функции *y=cosx* на отрезке $[0;\pi]$. $D(\arccos x) = [-1;1]$, $E(\arccos x) = [0;\pi]$.

Рассмотрим функцию *y= tgx* на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом отрезке функция *y=tgx* монотонно возрастает, и следовательно, обратима. Обозначим эту функцию через *arctgx*. Таким образом, функция *y=arctgx* является обратной к функции *y=tgx* на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $D(arctgx) = R$, $E(arctgx) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим функцию *y= ctgx* на отрезке $(0;\pi)$. На этом отрезке функция *y=ctgx* монотонно убывает, и следовательно, обратима. Обозначим эту функцию через *arcctgx*. Таким образом, функция *y=arcctgx* является обратной к функции *y=ctgx* на отрезке $(0;\pi)$. $D(arcctgx) = R$, $E(arcctgx) = (0;\pi)$.

Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, *arctgx*, *arcctgx*, в силу теоремы об обратной функции, непрерывны при всех значениях x, при которых эти функции определены.

Показательная функция $f(x)=a^x$ при *a>1* возрастает, а при *0<a<1* убывает на множестве *R;* область ее значений – множество R_+. Следовательно, она обратима, и для нее определена обратная функция *g(x)*, область определения которой – множество R_+ положительных чисел, а область значений – множество *R*. Эту функцию называют ***логарифмической*** *с основанием a* и обозначают $g(x)=log_a x$. Основные свойства логарифмической функции вытекают из свойств показательной функции и теоремы об обратной функции. Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел: $D(log_a x)=R_+$. Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел: $E(log_a x)=R$. Логарифмическая функция возрастает при *a>1* и убывает при *0<a<1* на всей области определения R_+.

Показательные и логарифмические функции непрерывны в области своего определения.

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$, определена в окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точке x_0. Точку x_0 называют точкой разрыва функции f в следующих случаях:

1) функция f не определена в этой точке;
2) функция f определена в точке x_0, но:
   ? не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
   ? существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точки разрыва первого рода. Точка разрыва x_0 называется точкой *разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = A_2$. При этом:

? если $A_1 = A_2 \neq f(x_0)$, или $A_1 = A_2$, но f не определена в точке x_0, то x_0 называется точкой *устранимого разрыва*;

? если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой *конечного разрыва*. Величину $|A_1 - A_2|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

Точки разрыва второго рода. Точка разрыва x_0 называется точкой *разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности (в этом случае точка x_0 называется точкой *бесконечного разрыва)*.

Исследуем на непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0.

Пример1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1, \\ a, & x = 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^2 = 1$, и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 = 1$, т.е. односторонние пределы существуют, равны между собой и $f(1) = a \Rightarrow$

? если $a \neq 1$, то в точке x_0 функция терпит устранимый разрыв.

? если $a = 1$, функция будет непрерывной в этой точке.

Пример2. $f\left(x\right)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ $x_0=0$;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f\left(x\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\operatorname{sgn}x=1$, и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f\left(x\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\operatorname{sgn}x=-1$; односторонние пределы существуют, но не равны между собой, откуда следует, что в точке x_0 функция терпит конечный разрыв, скачок функции: $\left|-1-1\right|=2$.

Пример3. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ $x_0=0$;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f\left(x\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$, и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f\left(x\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$, т.е. односторонние пределы равны $\pm\infty$ откуда следует, что в точке x_0 функция терпит разрыв второго рода (бесконечный разрыв).

Пример4. $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2, & x\neq\dfrac{1}{n},\\ 1, & x=\dfrac{1}{n}\end{cases}$;

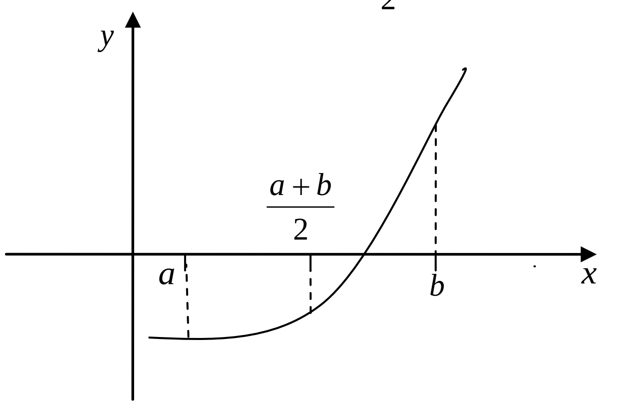
тогда $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$ не существует (т.к. при $x_n=\dfrac{1}{n}$ $f\left(x_n\right)=1\to 1$, а при $x_n\neq\dfrac{1}{n}$ $x_n\to 0$ $f\left(x_n\right)=x_n^2\to 0$) откуда следует, что в точке x_0 функция терпит разрыв *второго рода*.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ

Теорема 1. ***(I теорема Больцано-Коши).*** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;\ b]$ и на концах принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$, тогда существует точка $c\in(a;\ b)$, такая что $f(c)=0$.

Замечание. О единственности точки c ничего не утверждается.

Доказательство: Допустим, что $f(a)<0$, $f(b)>0$. Разделим отрезок $[a;\ b]$ пополам, т.е. рассмотрим точку $\frac{a+b}{2}$. Возможны 3 случая:



1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0\Rightarrow c=\frac{a+b}{2}$;

2) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$,

(рассмотрим отрезок $[a_1;\ b_1]=\left[a;\ \frac{a+b}{2}\right]$);

3) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$.

(рассмотрим отрезок $[a_1;\ b_1]=\left[\frac{a+b}{2};\ b\right]$);

Рассмотрим отрезок $[a_1;\ b_1]=\left[\frac{a+b}{2};\ b\right]$, где $f(a_1)<0$ и $f(b_1)>0$.

Теперь разделим $[a_1;\ b_1]$ пополам и тоже самое проделаем для данного отрезка. Продолжим этот процесс до n-ого шага.

Получим отрезок $[a_{n-1};\ b_{n-1}]$, где $f(a_{n-1})<0$, $f(b_{n-1})>0$. Разделим отрезок пополам и рассмотрим 3 случая:

1) $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)=0$;

2) $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)>0$ (рассмотрим отрезок $[a_n;\ b_n]=\left[a_{n-1};\ \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$);

3) $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)<0$ (рассмотрим отрезок $[a_n;\ b_n]=\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2};\ b_{n-1};\right]$).

Либо этот процесс через конечное число шагов закончится, когда $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$, $\left(c=\frac{a_n+b_n}{2}\right)$, либо продолжится до бесконечности. Получим последовательность вложенных отрезков: $[a_1;\ b_1]\supset[a_2;\ b_2]\supset\ldots\supset[a_{n-1};\ b_{n-1}]\supset[a_n;\ b_n]\supset\ldots$ и т.к. $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$, то выполняются все условия теоремы о вложенных отрезках. Из этой теоремы следует, что $\exists!c\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n;\ b_n]$. К тому же можно сказать, что a_n монотонно возрастает и стремится к c ($a_n\uparrow$ и $\to c$), b_n монотонно убывает и стремится к c ($b_n\downarrow$ и $\to c$), и как известно $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$. Из-за непрерывности функции следует, что если $a_n \to c \Rightarrow f(a_n) \to f(c)$, с другой стороны $f(a_n) < 0$, то получим, что $f(c) \le 0$, а также $b_n \to c \Rightarrow f(b_n) \to f(c)$, с другой стороны $f(b_n) > 0$, то получим, что $f(c) \ge 0$. Получили, что $\begin{cases} f(c) \ge 0 \\ f(c) \le 0 \end{cases} \Rightarrow f(c) = 0$. Ч.т.д.

Теорема 2. *(II теорема Больцано-Коши).* Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;\ b]$. Обозначим: $f(a) = A$, $f(b) = B$ и допустим, что $A < B$. Тогда, для $\forall C \in (A;\ B)$, $\exists c \in (a;\ b)$, что $f(c) = C$.

Иначе говоря, значения непрерывной функции охватывают весь отрезок $[A;\ B]$.

Доказательство: Введем дополнительную функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Понятно, что если $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то $\varphi(x)$ будет также непрерывна на $[a;\ b]$ и $\varphi(a) = f(a) - C = A - C$, $\varphi(b) = f(b) - C = B - C$. Т.к. $C \in (A;\ B)$, то $A < C < B \Rightarrow \varphi(a) < 0$ и $\varphi(b) > 0$, т.е. для функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ выполняются все условия ***I теоремы Больцано-Коши***. Следовательно, обязательно существует такая точка $c \in (a;\ b)$, что $\varphi(c) = 0$, и т.к. $\varphi(c) = f(c) - C = 0 \Rightarrow f(c) = C.$

Теорема 3. *(I теорема Вейерштрасса).* Любая непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция ограниченная.

Доказательство: показать, что функция $f(x)$ – ограниченная, означает показать, что $\exists M > 0$, что $\forall x \in [a;\ b]$, $|f(x)| \le M$. Пусть это условие нарушается, тогда для любого натурального числа n существует $x_n \in [a;\ b]$, что $|f(x_n)| > n$. Т.к. $x_n \in [a;\ b] \Rightarrow$ ограниченная то по ***теореме Больцано-Вейерштрасса*** $\exists x_{n_k} \to c,\ c \in [a;\ b]$, тогда $\left|f(x_{n_k})\right| > n_k \Rightarrow \left|f(x_{n_k})\right| \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

С другой стороны, $x_{n_k} \to c$, а $f(x)$ – непрерывная, то $f(x_{n_k}) \to f(c)$. Оказывается, что с одной стороны, $\left|f(x_{n_k})\right| \to |f(c)|$ (к конечному числу), а с другой стороны $\left|f(x_{n_k})\right| \to +\infty$. Пришли к противоречию, т.е. $f(x)$ – ограниченная. Ч.т.д.

Например, функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (0;\ 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ определена на отрезке $[0;\ 1]$, но неограниченная, т.к.в точке $x = 0$ функция не является непрерывной.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то $f(x)$ – ограниченная функция, т.е. если обозначить $E(f) = \{f(x),\ x \in [a;\ b]\}$, то множество $E(f)$ будет ограниченным. Тогда $\sup E(f) = M < +\infty,\ \inf E(f) = m > -\infty$.

Возникает вопрос, достигает ли функция значений M и m?

Теорема 4. ***(II теорема Вейерштрасса).*** Любая непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения, т.е. $\exists x_1,\ x_2 \in [a;\ b]$, что $f(x_1) = M = \sup\limits_{x\in[a;\ b]} f(x) = \max\limits_{x\in[a;\ b]} f(x)$ и $f(x_2) = m = \inf\limits_{x\in[a;\ b]} f(x) = \min\limits_{x\in[a;\ b]} f(x)$.

Доказательство: допустим это так, т.е. $M = \sup f(x)$ и для $\forall x \in [a;\ b],\ f(x) < M$. Обозначим через $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} > 0$. Функция $\varphi(x)$– непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, т.к. $M - f(x)$– непрерывная функция и $M - f(x) \neq 0$. Следовательно, по ***I теореме Вейерштрасса***, функция $\varphi(x)$ – ограниченная, т.е. $\exists \mu_1,\ \mu_2 > 0$, что $\mu_1 \le \varphi(x) \le \mu_2,\ \forall x \in [a;\ b]$. Следовательно, $M - f(x) \ge \dfrac{1}{\mu_2} \Rightarrow\ f(x) \le M - \dfrac{1}{\mu_2},\ \ \forall x \in [a;\ b]$. А это противоречит, тому, что $M = \sup f(x) \Rightarrow M - \dfrac{1}{\mu_2}$ не должна быть верхней гранью, но $f(x) \le M - \dfrac{1}{\mu_2}$. Пришли к противоречию. Т.о. $\exists x_1 \in [a;\ b]$, что $f(x_1) = M = \sup\limits_{x\in[a;\ b]} f(x) = \max\limits_{x\in[a;\ b]} f(x)$.

С помощью данной теоремы перефразируем II теорему Больцано-Коши:
Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;\ b]$. Обозначим $\max\limits_{x\in[a;\ b]} f(x) = M$, и $\min\limits_{x\in[a;\ b]} f(x) = m$, тогда значения функции $f(x)$ охватывают весь отрезок $[m;\ M]$, т.е $\forall C \in (m;\ M),\ \exists c \in (a;\ b)$, что $f(c) = C$.

РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ТЕОРЕМА КАНТОРА.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на множестве X. Это значит, что функция непрерывна в любой точке множества X. В любой точке $x_0 \in X$, функция $f(x)$ будет непрерывна, т.е. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(x_0;\ \varepsilon) > 0,\ \forall x,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Возникает вопрос, можно ли найти для данного числа ε число δ, которое годилось для любой точки $x_0 \in X$ одновременно (иногда удается, иногда нет).

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***равномерно непрерывной*** на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x_1,\ x_2 \in X :\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Понятно, что любая равномерно непрерывная функция также непрерывна, но обратное не всегда верно.

Рассмотрим два примера. Исследуем на равномерную непрерывность две функции $f(x) = \sin x$ и $f(x) = x^2$ на множестве $(-\infty;\ +\infty)$. Обе эти функции непрерывны на $(-\infty;\ +\infty)$.

Пример 1. $f(x) = \sin x$;

Берем $\forall \varepsilon > 0,$ и любые точки x_1 и $x_2 \in R$, $|x_2 - x_1| < \delta$ тогда,

$$\left|\sin x_2-\sin x_1\right|\le 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\le 2\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|=\left|x_2-x_1\right|,\ \text{т.е.}$$

$\left|\sin x_2-\sin x_1\right|\le\left|x_2-x_1\right|<\varepsilon$, т.к. $\left|x_2-x_1\right|<\delta\Rightarrow\varepsilon=\delta \Rightarrow$ что $f(x)=\sin x$ равномерно непрерывная функция на множестве $(-\infty;\ +\infty)$.

Пример 2. $f(x)=x^2$;

Берем $\forall\varepsilon>0$, и любые точки x_1 и $x_2\in R$, $\left|x_2-x_1\right|<\delta$, $\delta<1$, тогда,

$\left|x_2^2-x_1^2\right|=\left|x_2-x_1\right|\cdot\left|x_2+x_1\right|<\delta\left|x_2+x_1\right|$ – это выражение должно быть $<\varepsilon$. Но $\left|x_2-x_1\right|<1\Rightarrow x_1-1<x_2<x_1+1\Rightarrow 2x_1-1<x_2+x_1<2x_1+1\Rightarrow\left|x_2+x_1\right|<2\left|x_1\right|+1$. Получается $\left|x_2^2-x_1^2\right|=\left|x_2-x_1\right|\cdot\left|x_2+x_1\right|<\delta\left|x_2+x_1\right|<2\left(2\left|x_1\right|+1\right)\delta<\varepsilon\Rightarrow\delta<\dfrac{\varepsilon}{2\left|x_1\right|+1}$. Так как $x_1\in R$ и мы имеем возможность подобрать $x_1\to+\infty$, тогда $\delta\to 0\Rightarrow$ это говорит о том, что для функции вряд ли можно взять число δ, которое годилось для всех $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Из вышеприведенных примеров следует, что $f(x)=\sin x$ равномерно непрерывная на интервале $(-\infty;\ +\infty)$, а $f(x)=x^2$ непрерывная, но ничего нельзя сказать на счет равномерной непрерывности на интервале $(-\infty;\ +\infty)$.

Отрицание ***равномерной непрерывности:***

$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta,\ \exists x_1,\ x_2\in X$, что $\left|x_1-x_2\right|<\delta$ но $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|>\varepsilon_0$.

Теперь покажем, что функция $f(x)=x^2$ на множестве $(-\infty;\ +\infty)$ не является равномерно непрерывной. Возьмем $\delta_n=\dfrac{1}{n}$, тогда пусть $x_1=n+\dfrac{1}{2n}$, $x_2=n$ оценим $\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|n^2-\left(n+\dfrac{1}{2n}\right)^2\right|>\dfrac{1}{2}$. Оказывается, что если изучать функцию $f(x)=x^2$ на замкнутом отрезке $[a;\ b]$, то функция будет равномерно непрерывной.

Теорема (*Кантора*). Любая непрерывная на отрезке $[a;\,b]$ функция – равномерно непрерывная.

Доказательство: доказательство проведем от противного. Допустим, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, но не является равномерно непрерывной, т.е.

$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta,\ \exists x',\ x''\in[a;\ b]$ что $\left|x'-x''\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|>\varepsilon_0$. Возьмем $\delta_n=\dfrac{1}{n}$, тогда

$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta_n=\dfrac{1}{n},\ \exists x_n',\ x_n''\in[a;\ b]$ что $\left|x_n'-x_n''\right|<\delta_n\Rightarrow\left|f\left(x_n'\right)-f\left(x_n''\right)\right|>\varepsilon_0$. Рассмотрим первую последовательность $\{x_n'\}$, она содержится в $[a;\ b]$, т.е. она ограниченная. По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{n_k}'\to c\in[a;\ b]$, т.е. можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к числу c. Теперь рассмотрим *подпоследовательность* $\{x_{n_k}''\}$последовательности $\{x_n''\}$.

$\left|x_{n_k}'-x_{n_k}''\right|<\delta_{n_k}\quad\delta_{n_k}\to 0,\ k\to\infty$;

$-\delta_{n_k} < x''_{n_k} - x'_{n_k} < \delta_{n_k} \Leftrightarrow x'_{n_k} - \delta_{n_k} < x''_{n_k} < x'_{n_k} + \delta_{n_k}$, т.к $x'_{n_k} - \delta_{n_k} \to c$ и $x'_{n_k} + \delta_{n_k} \to c$ при $k \to \infty \Rightarrow \exists x''_{n_k} \to c$. Получили, что
$x'_{n_k} \to c$ и $x''_{n_k} \to c$, $\left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| < \delta_{n_k}$, но $\left|f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right| > \varepsilon_0$. Если $x'_{n_k} \to c$, то по непрерывности $f(x)$ $f\left(x'_{n_k}\right) \to f(c)$, и если $x''_{n_k} \to c$, то $f\left(x''_{n_k}\right) \to f(c)$, то $\Rightarrow$ $\left\{f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right\}$ имеет предел, и он равен нулю. Следовательно, для $\forall \varepsilon_0 > 0,\ \exists k_0 > 0,\ \forall k > k_0$, $\left|f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right)\right| < \varepsilon_0$, пришли к противоречию $\Rightarrow$ любая непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция – равномерно непрерывная.

Замечание 1. Здесь важнейшую роль играет замкнутость отрезка $[a;\ b]$, потому что, если бы мы имели полузамкнутый отрезок $(a;\ b]$, мы можем выделить $x_{n_k} \to c \in [a;\ b]$, где c может совпадать с a, где функция не является непрерывной.

Например функция $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in (0;\ 1]$ – непрерывная, но не является равномерно непрерывной на $(0;\ 1]$ (доказать самостоятельно).

Замечание 2. Теорема Кантора дает достаточное условие для равномерной непрерывности.