

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

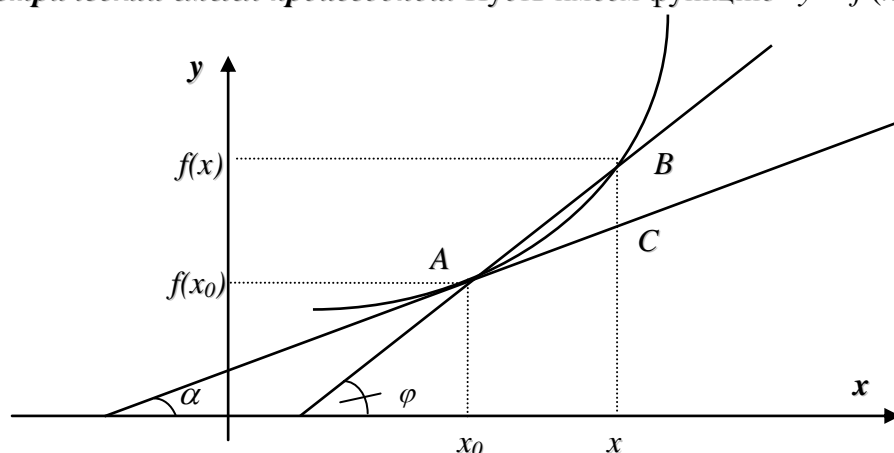
Пусть имеем функцию $f(x)$, определенную на множестве X и пусть точка $x_0 \in X$ - внутренняя точка, т.е. точка для которой существует окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset X$. Возьмем любую точку $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и обозначим через $\Delta x = x - x_0$, а $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$.

$\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента, а $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ приращением функции.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 и называется следующий предел:

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если этот предел существует и конечное число, и обозначают через $f'(x_0)$

Геометрический смысл производной. Пусть имеем функцию $y = f(x)$.



Рассмотрим прямую, проходящую через точку $A(x_0; f(x_0))$ и $B(x; f(x))$. Прямая AB называется секущей к кривой $y = f(x)$. Угловым коэффициентом секущей AB , равен $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Обозначим через φ угол между секущей и положительным направлением

оси OX . Тогда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Угол φ зависит от x_0 и x . Если изменять x , а x_0

фиксировать, то φ будет меняться. Если существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi$, или, если существует предельное значение секущей, то это будет называться касательной, которая образует угол

α с осью OX , $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$. Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, тогда это

число является угловым коэффициентом прямой, которая проходит через точки $(x_0; f(x_0))$. Т.е. $f'(x_0)$ - угловым коэффициентом касательной, проходящей через точку с абсциссой x_0 . Отсюда можно получить уравнение касательной. Касательной называется

прямая $y = kx + b$ с угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$. Таким образом, $y = f'(x_0)x + b$, $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Rightarrow$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

Это уравнение касательной к кривой $y = kx + b$ с абсциссой x_0 .

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОИЗВОДНОЙ И НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ ФУНКЦИИ ФОРМУЛА ПОЛНОГО ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (1)$$

где $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$.

Доказательство: если функция имеет производную в точке x_0 то имеет место:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x).$$

Умножим обе части на Δx получим формулу (1): $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \alpha(\Delta x)\Delta x$. Из (1) \Rightarrow , что если для функции f существует производная в точке x_0 , то в этой точке функция непрерывна.

Полученную формулу запишем следующим образом:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \beta(x) \quad (2),$$

где $\beta(x) = \alpha(x) \cdot \Delta x$, т.е. изменение функции в точке x_0 – произведение производной и аргумента. Формула (2) – называется формулой для приращений функции.

Следствие: если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то она непрерывна в точке x_0 (т.е. непрерывность функции в точке x_0 – это необходимое условие существования производной функции в точке x_0).

Доказательство:

Покажем, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в точке x_0 . Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Мы должны найти такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $|x - x_0| < \delta$. Т.к. $\beta(x) = o(\Delta x)$, допустим, что существует такая окрестность точки x_0 , что $|\beta(x)| < |\Delta x|$. Тогда, если $\delta = \frac{\varepsilon}{|f'(x_0)| + 1}$, то

$|f(x) - f(x_0)| \leq (1 + |f'(x_0)|) \cdot |\Delta x| = (1 + |f'(x_0)|) \cdot \delta = \varepsilon$. Это необходимое но не достаточное условие для существования производной.

ОДНОСТОРОННИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Если $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то понятие односторонних пределов, позволяет определить

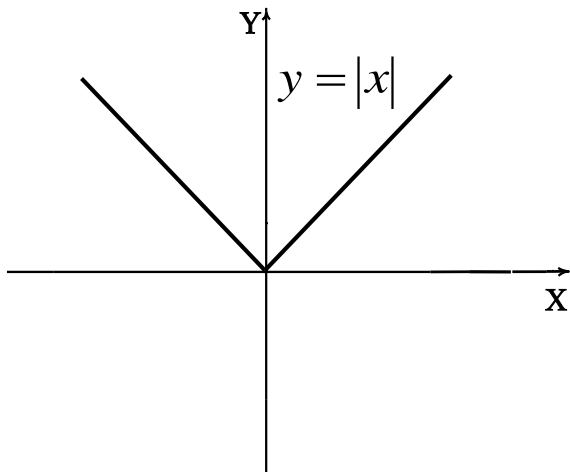
понятие односторонних производных:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Для того, чтобы функция $f(x)$ имела производную в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние производные и равнялись между собой.

Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = |x|$.



$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \quad f'(0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1;$$

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \quad f'(0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1, \quad \text{т.е.} \quad \text{односторонние}$$

производные существуют и не равны между собой, откуда следует, что функция в точке 0 не имеет производной.

Правила вычисления производной.

Рассмотрим функцию $f(x)$, и пусть она имеет производную в любой точке x . Тогда мы получим новую функцию $f'(x)$.

Пусть имеем функции $u(x)$ и $v(x)$, которые определены на множестве X и имеют производные этом множестве, а c – любое постоянное число. Тогда:

1. $c \cdot u(x)$ тоже имеет производную на множестве X и $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c \cdot u(x) - c \cdot u(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = c \cdot u'(x_0) \Rightarrow (c \cdot u(x))' |_{x=x_0} = c \cdot u'(x) |_{x=x_0}.$$

2. $u(x) \pm v(x)$ тоже имеет производную на множестве X и $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) + v(x) - u(x_0) - v(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right] = u'(x_0) + v'(x_0) \Rightarrow$$

$$(u(x) + v(x))' |_{x=x_0} = u'(x) |_{x=x_0} + v'(x) |_{x=x_0}.$$

3. $u(x) \cdot v(x)$ тоже имеет производную на множестве X и

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x):$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{u(x)v(x) - u(x)v(x_0)}{x - x_0} + \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{u(x)(v(x) - v(x_0))}{x - x_0} + \frac{v(x_0)(u(x) - u(x_0))}{x - x_0} \right] = u(x_0)v'(x_0) + u'(x_0)v(x_0) \Rightarrow$$

$$(u(x) \cdot v(x))' |_{x=x_0} = u'(x) \cdot v(x) |_{x=x_0} + v'(x)u(x) |_{x=x_0}.$$

4. $\frac{u(x)}{v(x)}$ тоже имеет производную на множестве X и $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x_0) - v(x)u(x_0)}{(x - x_0)v(x)v(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{v(x_0)(u(x) - u(x_0))}{(x - x_0)v(x)v(x_0)} - \frac{u(x_0)(v(x) - v(x_0))}{(x - x_0)v(x)v(x_0)} \right] =$$

$$= \frac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{v^2(x_0)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' \Big|_{x=x_0} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} \Big|_{x=x_0}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция f определена на множестве A и принимает значения из B ($f: A \rightarrow B$), а функция g определена на множестве B и принимает значения из C ($g: B \rightarrow C$), тогда $h(x) = g(f(x))$ ($h: A \rightarrow C$) называется сложной функцией.

Теорема. Если функция f имеет производную в точке x_0 , а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, тогда функция h имеет производную в точке x_0 и $h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Доказательство: Рассмотрим приращение функции h :

$$h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)).$$

Разделим обе части соотношения на Δx :

$$\frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если для функции f существует производная в точке x_0 , то в этой точке функция непрерывна, т.е. $f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Рассмотрим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)} \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= g'(f(x_0))f'(x_0) = h'(x_0)$$

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

$f: A \rightarrow B$ и f – взаимно однозначная функция

$f^{-1}: B \rightarrow A$, и имеет место следующее тождество:

$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A.$ Так как $f^{-1}(f(x))$ сложная функция, то с применением формулы производной сложной функции получим:

$$[f^{-1}(f(x))] \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'}.$$

Теорему:

Теорема. Если для функции f существует производная $f'(x_0) \neq 0$, то для обратной функции f^{-1} существует $[f^{-1}(y_0)]'$ и $[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

ПРОИЗВОДНАЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $f(x) = const$,

тогда производная будет $f'(x) = 0$;

2. $f(x) = x^n$, $n \in N$.

Производная будет $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = nx_0^{n-1}$.

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. $f(x) = \sin x$,

тогда производная будет $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos x_0$.

$$f'(x) = \cos x$$

2. Аналогично для функции $f(x) = \cos x$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = -\sin x_0.$$

$$f'(x) = -\sin x$$

3. $f(x) = \operatorname{tg} x$,

тогда производная будет $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

4. Аналогично для функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$:

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. $f(x) = \arcsin x$,

т.к. $\sin(\arcsin x) = x$, $\forall x \in [-1; 1]$, то

$$[\sin(\arcsin x)]' = x' \Rightarrow \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1 \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $f(x) = \arccos x$,

т.к. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $f(x) = \operatorname{arctg} x$,

т.к. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\forall x \in R$, то

$$[\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)]' = x' \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} \cdot (\operatorname{arctg} x)' = 1 \Rightarrow (\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$4. f(x) = \operatorname{arcc}tgx,$$

т.к. $\operatorname{arct}gx + \operatorname{arcc}tgx = \frac{\pi}{2}$, то

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

$$1. f(x) = a^x,$$

тогда производная будет

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x_0} (a^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = a^{x_0} \ln a;$$

2. в частности, когда $f(x) = e^x$,

производная будет

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x_0} (e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = e^{x_0};$$

ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

$$1. f(x) = \ln x,$$

тогда производная будет

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{\substack{x - x_0 = t \\ x = x_0 + t \\ t \rightarrow 0}} \frac{\ln \frac{t + x_0}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{t + x_0}{x_0}}{t} = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{t}{x_0} \right)}{\frac{t}{x_0}} = \frac{1}{x_0};$$

$$2. f(x) = \log_a x,$$

$$\text{т.к. } f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

тогда производная будет

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

$$1. f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{т.к. } f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

тогда производная будет $f'(x) = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Как известно $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – называется приращением функции в точке x_0 .

Возникает вопрос можно ли приращение функции $\Delta f(x_0)$ представить в виде:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad (1)$$

где A – некоторая постоянная.

Если имеет место (1), то функция $f(x)$ в точке x_0 называется дифференцируемой, а выражение $A \cdot \Delta x$, которая является главной частью приращения функции, – называется дифференциалом функции в точке x_0 .

Теорема. Для того чтобы функция f была дифференцируема в точке x_0 необходимо и достаточно чтобы она имела производную в точке x_0 и $A = f'(x_0)$.

Доказательство:

$$\text{пусть } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = o(\Delta x) \Rightarrow$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\Delta x, \text{ где } A = f'(x_0).$$

Наоборот, пусть $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)\Delta x$, т.е. функция дифференцируема в точке x_0 .

Покажем, что $\exists f'(x_0)$ и $f'(x_0) = A$.

Обе части тождества (1) разделим на Δx , получим $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$ правая

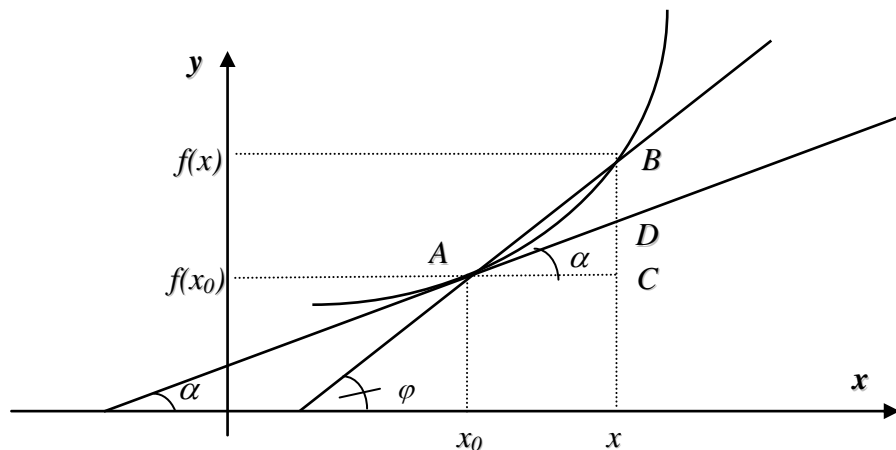
часть имеет предел, равный A , следовательно, левая часть тоже имеет предел, который равен $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = A$.

$$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + o(\Delta x)) = A \Rightarrow f'(x_0) = A.$$

Таким образом, существование производной функции необходимое и достаточное условие для дифференцируемости, потому в дальнейшем функции которые имеют производную в точке x_0 называется дифференцируемой в точке x_0 .

Главная часть приращения (1) называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$, где dx – любое приращение аргумента. Следовательно, дифференциал функции в точке – это линейная функция относительно приращения Δx .

Геометрический смысл дифференциала. Пусть имеем функцию $y = f(x)$.



$BC = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $AC = \Delta x$. Проведем касательную в точке A , которая пересекает BC в точке D . Тогда $DC = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0)$. $BD \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $BC \approx DC$. Это дает возможность посчитать приблизительно $\Delta f(x_0)$ по формуле $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Пример. $f(x) = x^3$;

$$(x_0 + \Delta x)^3 - (x_0)^3 = (x_0 + \Delta x - x_0)(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2) = \\ = \Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 \approx 3x_0^2\Delta x.$$

Т.е. приращение в точке x_0 функции $f(x) = x^3$ приблизительно можно посчитать по формуле: $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x = 3x_0^2 \cdot \Delta x$.

ТЕОРЕМА ФЕРМА

Определение. Пусть имеем функцию f определенную на множестве X , и x_0 – внутренняя точка. Точка x_0 – называется точкой максимума (точкой минимума) функции f , если $\exists(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset X$, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Теорема Ферма (необходимое условие для экстремума). Если внутренняя точка x_0 – является точкой экстремума для дифференцируемой функции f , тогда $f'(x_0) = 0$.

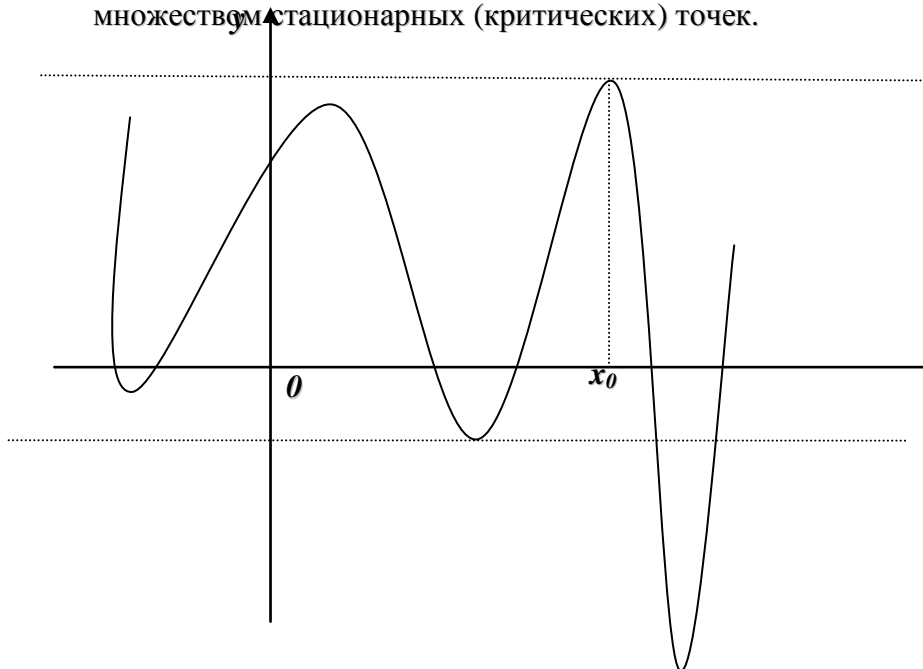
Доказательство: т.к. точка x_0 – внутренняя точка, то $\exists(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset X$. Если $\exists f'(x_0)$ то \Rightarrow что односторонние производные тоже существуют и равны между собой. Допустим, что x_0 – точка максимума, т.е. $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Рассмотрим $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Если $x - x_0 > 0$ то $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. Это значит, что $f'(x_0 + 0) = f'(x_0) \leq 0$. (*)

Рассмотрим производную слева $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Т.к. $f(x) < f(x_0)$ и $x - x_0 < 0 \Rightarrow$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Следовательно, можно сказать, что $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \geq 0$. (**)

Из (*) и (**) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$. Ч.т.д.

Замечание: Обозначим $A = \{x, f'(x) = 0\}$. Для дифференцируемой функции – это множество, где находятся все точки экстремума функции. Множество A – называется множеством стационарных (критических) точек.

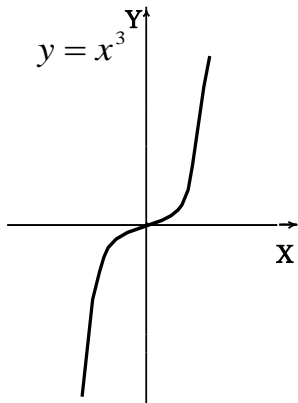


Графически это означает, что если точка x_0 – точка экстремума, то касательная, проведенная в точке x_0 , параллельна оси OX , и следовательно $f'(x) = 0$.

Эта теорема является необходимым, но не достаточным условием для существования экстремума.

Например, $y = x^3$.

$y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Точка $x = 0$ является критической точкой, но не является точкой экстремума, так как в окрестности этой точки функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.



ТЕОРЕМА РОЛЛЯ

Теорема Ролля. Пусть имеем функцию f , которая непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет конечную производную на интервале $(a; b)$, а также на концах принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$. Тогда, существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f'(c) = 0$

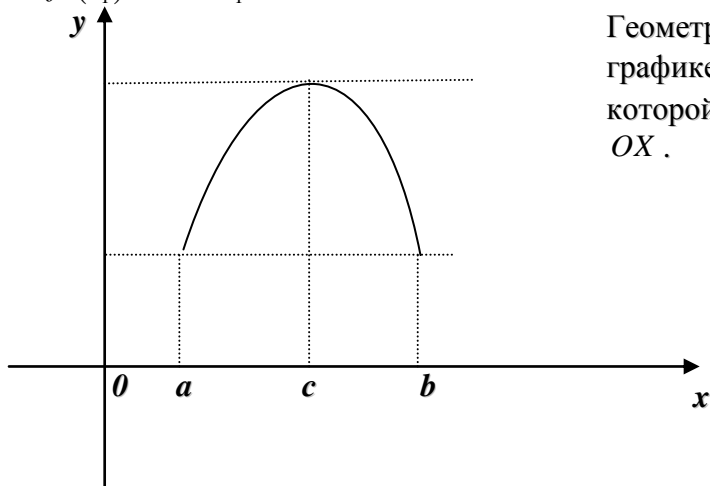
Замечание. Данная точка может быть не единственной.

Доказательство: По II теореме Вейерштрасса, если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она принимает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке, т.е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a; b]$, что $\max_{x \in [a; b]} f(x) = f(x_1) = M$ и

$$\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(x_2) = m.$$

Рассмотрим два случая:

- 1) Пусть $M = m \Rightarrow f(x) = const \Rightarrow f(x) = m \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow c$ – любая точка из $[a; b]$.
- 2) Пусть $M > m$. Т.к. $f(a) = f(b)$ и $M \neq m \Rightarrow$ что хотя бы одна из этих точек x_1, x_2 не совпадает с точками a и b . Допустим, что $x_1 \in (a; b)$ и внутренняя x_1 – точка экстремума для дифференцируемой функции f . Из теоремы Ферма \Rightarrow что, обязательно $f'(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = c$. Ч.т.д.



Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox .

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА ИЛИ ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

Теорема Лагранжа. Пусть имеем функцию f , которая определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и существует конечная производная $f'(x)$ хотя бы на интервале $(a; b)$.

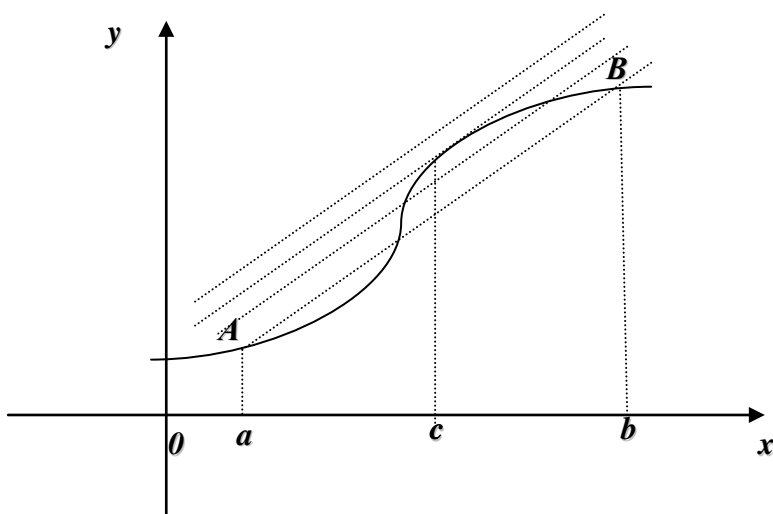
Тогда, существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную функцию

$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a; b]$,

$\exists F'(x)$, и $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$. Следовательно, функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, т.е. $\exists c$, где $F'(c) = 0$. Посчитаем $F'(c)$:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \text{ Ч.т.д.}$$



$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ отражает угловой

коэффициент секущей, проходящей через точки A и B . Если эту прямую перемещать параллельно самой себе, то в какой-то момент эта прямая будет касательной к кривой.

ТЕОРЕМА КОШИ

Теорема Коши. Пусть имеем функции f и g , которые непрерывны на отрезке $[a; b]$ и существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$ для $\forall x \in [a; b]$.

Тогда $\exists c \in (a; b)$, что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство: сначала покажем, что $g(b) \neq g(a)$. Допустим, что $g(b) = g(a)$, тогда функция будет удовлетворять всем условиям теоремы Ролля, следовательно, $\exists c$, что $g'(c) = 0$, а это невозможно, т.к. $g'(x) \neq 0 \forall x \in [a; b] \Rightarrow g(b) \neq g(a)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$. Эта

функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, как сумма двух непрерывных функций, $\exists F'(x)$, и $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$. Следовательно функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, т.е. $\exists c$, где $F'(c) = 0$. Посчитаем $F'(c)$:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \text{ Ч.т.д.}$$

Замечание. Теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа, если подобрать $g(x) = x$.

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X , и пусть функция $f(x)$ в каждой точке X имеет конечную производную. Если в каждой точке вычислить производную функции $f(x)$, то получим новую функцию – $f'(x)$. Если же существует производная от функции $f'(x)$, то данную производную, называют производной второго порядка. Производную функции $f'(x)$ в точке x_0 обозначают $f''(x_0)$ (производная второго порядка в точке x_0) и называют следующий предел: $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$, если этот предел существует и конечное число.

Аналогичным образом определяется производная третьего порядка, и т.д. Если мы определили производную $n-1$ -ого порядка, то производная n -ого порядка определяется следующим образом: $f^n(x) = [f^{n-1}(x)]'$.

Рассмотрим следующие функции:

1. Функция $f(x) = e^x$ имеет производную любого порядка: $f^n(x) = e^x$;
2. Для функции $f(x) = \sin x$ производная n -ого порядка определяется следующим образом: $f^n(x) = \sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$;
3. Аналогично определяется производная n -ого порядка для функции $f(x) = \cos x$:
 $f^n(x) = \cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$.

Правила вычисления производной n -ого порядка.

Пусть имеем функции $f(x)$ и $g(x)$, которые определены и на множестве X и имеют производные n -ого порядка на этом множестве, а c – любое постоянное число. Тогда: для функций $c \cdot f(x)$, $f(x) \pm g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$, тоже существуют производные n -ого порядка на множестве X и они определяются следующим образом:

5. $(c \cdot f(x))^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x)$;
6. $(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$;
7. $(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$ – формула Лейбница.

Дифференциал n -ого порядка.

Напомним, что для функции $f(x)$ дифференциал первого порядка, определяется следующим образом: $df(x) = f'(x)dx$, с его помощью определяется дифференциал второго порядка и высших порядков:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = f''(x)dx^2;$$

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)) = f^n(x)dx^n.$$

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть имеем функцию многочлен $P_n(x)$ степени n :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Преобразуем этот многочлен также в многочлен степени n относительно разности $x - x_0$, где x_0 – произвольное число, т.е. представим $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n. \quad (*)$$

Для нахождения коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ продифференцируем n раз равенство (*):

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2 + \dots + nA_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4(x-x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1A_n.$$

Подставляя $x = x_0$ в полученные равенства и равенство (*), имеем:

$$P_n(x_0) = A_0, \quad \text{т.е. } A_0 = P_n(x_0),$$

$$P_n'(x_0) = A_1, \quad \text{т.е. } A_1 = \frac{P_n'(x_0)}{1!},$$

$$P_n''(x_0) = 2A_2, \quad \text{т.е. } A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!},$$

$$P_n'''(x_0) = 2 \cdot 3A_3, \quad \text{т.е. } A_3 = \frac{P_n'''(x_0)}{3!},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1A_n, \quad \text{т.е. } A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставляя найденные значения $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ в равенство (*), получим:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (**)$$

т.е. коэффициент многочлена определяется через производную в точке x_0 .

Формула ()** называется **формулой Тейлора для многочлена $P_n(x)$ степени n .**

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть для функции $f(x)$, существуют производные n -ого порядка. Любой такой функции $f(x)$ сопоставим многочлен n -ого порядка.

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ и обозначим через}$$

$$r_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right)$$

Свойства $r_n(x)$:

1. $r_n(x)$ имеет производную до n -ого порядка включительно.
2. $r_n(x_0) = 0, r_n'(x_0) = 0, r_n''(x_0) = 0, \dots, r_n^{(n)}(x_0) = 0.$

Лемма. Если функция $\varphi(x)$ имеет производную n -ого порядка в окрестности точки x_0 и $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$, то $\varphi(x) = o(x-x_0)^n$.

Доказательство: доказательство проведем методом математической индукции.

Пусть $n=1$, т.е. $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$. Докажем, что $\varphi(x) = o(x-x_0)^n$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0) = 0.$$

Допустим, что лемма верна для n , докажем справедливость леммы для $n+1$.

Обозначим через $g(x) = \varphi'(x)$, тогда $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0 \Rightarrow$ по индукции, что $g(x) = o(x - x_0)^n$. Рассмотрим теперь

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(c)(x - x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(c)}{(x - x_0)^n}, \text{ где } x_0 < c < x. \text{ Так как}$$

$g(x) = o(x - x_0)^n$, то $g(c) = o(c - x_0)^n$ и если $x \rightarrow x_0$, то c тоже стремится к x_0 ($c \rightarrow x_0$), получим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(c)}{(x - x_0)^n} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{g(c)}{(c - x_0)^n} = 0 \Rightarrow g'(x) = \varphi^{(n+1)}(x) = o(x - x_0)^n.$$

Так как функция $r_n(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы, то можно сказать, что $r_n(x) = o(x - x_0)^n$. Таким образом для функции имеем следующее представление

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n \quad (1)$$

Формула (1) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Формула Пеано имеет недостаток, т.к. в явном виде мы не знаем вид остаточного члена.

Лагранж получил другой вид для остаточного члена. Он показал, что если существует производная до n -ого порядка, то $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где c некоторая

точка из интервала $(x_0; x)$, тем самым получил другую запись формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (2)$$

Формула (3) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

При $x_0 = 0$ получается частный случай формулы Тейлора – формула Маклорана:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (3)$$

Разложение по формуле Тейлора для элементарных функций.

Запишем формулу Маклорана для функции $f(x) = e^x$. Находим производные этой функции: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Так как $f(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = e^0 = 1$, $f''(x) = e^0 = 1$, ..., $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, $f^{(n+1)}(c) = e^c$, то по формуле (3) имеем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

при $x = 1$, $0 < c < 2$, $e^c < 9$, оценим число e .

$$e - \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) < \frac{9}{(n+1)!},$$

Ранее (при изучении числа e) мы получили более точную оценку $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots + \frac{\Theta_n}{n!n}$, где $0 < \Theta_n < 1 \Rightarrow e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

Приведем разложения по формуле Маклорана некоторых других элементарных функций:

$$f(x) = \sin x, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} -1, & n = 4m + 3, \\ 0, & n = 2m, \\ 1, & n = 1 + 4m. \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$f(x) = \cos x, \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} -1, & n = 4m + 2, \\ 0, & n = 2m + 1, \\ 1, & n = 4m. \end{cases}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$f(x) = \ln(x+1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$\text{при } x=1, \ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n};$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n);$$

$$f(x) = \arctg x,$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}),$$

при $x=1$, $\arctg 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$, и мы получим приближенное вычисление числа π .

ИЗУЧЕНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Промежутки монотонности

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a; b]$, и имеет конечную производную на $[a; b]$.

Если

- ? $f'(x) > 0$ на $[a; b]$, то $f(x)$ – возрастающая на $[a; b]$ функция;
- ? $f'(x) < 0$ на $[a; b]$, то $f(x)$ – убывающая на $[a; b]$ функция;
- ? $f'(x) \geq 0$ на $[a; b]$, то $f(x)$ – неубывающая на $[a; b]$ функция;
- ? $f'(x) \leq 0$ на $[a; b]$, то $f(x)$ – невозрастающая на $[a; b]$ функция.

Доказательство: пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a; b]$, и имеет конечную производную на $[a; b]$. Докажем, что если $f'(x) > 0$ на $[a; b]$, то $f(x)$ –

возрастающая на $[a; b]$ функция. Для $\forall x_1, x_2 \in [a; b]$ предположим, что $x_1 < x_2$. Все условия теоремы Лагранжа выполняются $\Rightarrow \exists c \in (x_1; x_2)$, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ (т.к. $f'(c) > 0, (x_2 - x_1) > 0$) $\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Ч.т.д.

Определение. Те промежутки, где функция только возрастает или только убывает, называются промежутками монотонности функции.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a; b]$, и имеет конечную производную на $[a; b]$. Для того, чтобы функция $f(x)$ была бы постоянной, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0, \forall x \in [a; b]$.

Доказательство: допустим что $f'(x) = 0$, и докажем, что $f(x)$ – постоянная функция. Для $\forall x_1, x_2 \in [a; b]$ предположим, что $x_1 < x_2$ и покажем, что $f(x_1) = f(x_2)$. Для разности $f(x_2) - f(x_1)$ применим формулу Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ т.к. $f'(c) = 0$. Ч.т.д.

Экстремумы функции

Определение. Пусть имеем функцию f определенную на множестве X , и x_0 – внутренняя точка. Точка x_0 – называется точкой максимума (точкой минимума) функции f , если $\exists (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset X$, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) f(x) < f(x_0) (f(x) > f(x_0))$. Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Необходимое условие экстремума

Из теоремы Ферма мы знаем, что если внутренняя точка x_0 – является точкой экстремума для дифференцируемой функции f , тогда $f'(x_0) = 0$. Если обозначим через A множество всех точек для которых $f'(x) = 0$, то из этой теоремы следует, что точки экстремума функции f нужно искать во множестве A . Множество A – называется множеством стационарных (критических) точек.

Достаточное условие экстремума (с помощью производной I-ого порядка).

Теорема 3. Пусть внутренняя точка x_0 – критическая точка для дифференцируемой функции f .

- ? Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$ (т.е. до точки x_0 возрастает, после точки x_0 убывает), тогда $x_0 = x_{\max}$.
- ? Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$ (т.е. до точки x_0 убывает, после точки x_0 возрастает), тогда $x_0 = x_{\min}$.
- ? Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, или если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, тогда точка x_0 не является ни максимумом ни минимумом.

Доказательство: пусть точка x_0 – критическая точка для дифференцируемой функции f и $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. К разности $f(x) - f(x_0)$ применим теорему Лагранжа:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \text{ где } c \in (x_0; x), \text{ при } x > x_0,$$

$$c \in (x; x_0), \text{ при } x < x_0.$$

Из условия, что $x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$, а из $f'(x) > 0 \Rightarrow f'(c) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$. Если $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$, а из $f'(x) < 0 \Rightarrow f'(c) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow x_0 = x_{\max}$. Ч.т.д.

Достаточное условие экстремума (с помощью производных высшего порядка).

Теорема 4. Пусть точка x_0 – критическая точка для дифференцируемой функции f . Допустим, что для функции f существует производная II-ого порядка.

? Если $f''(x_0) < 0$, тогда $x_0 = x_{\max}$.

? Если $f''(x_0) > 0$, тогда $x_0 = x_{\min}$.

? Если $f''(x_0) = 0$, то ответа нет.

Доказательство: разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора до второго порядка

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2, \text{ т.к. } x_0 \text{ – критическая точка, то}$$

$$f'(x_0) = 0 \text{ и } f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2. \text{ Так как вторым слагаемым}$$

$o(x - x_0)^2$ можно пренебречь, то знак выражения справа определяется первым слагаемым.

Так как $(x - x_0)^2 > 0$ при $x \neq x_0 \Rightarrow$ что

? если $f''(x_0) > 0$, тогда $f(x) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0)$ и тем самым $x_0 = x_{\min}$;

? если $f''(x_0) < 0$, тогда $f(x) - f(x_0) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0)$ и тем самым $x_0 = x_{\max}$;

? если $f''(x_0) = 0$, то ответа нет.

Пример. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 + 11$.

$$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2, \quad x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f''(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x,$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow \text{что ответа нет};$$

$$f''(1) < 0 \Rightarrow 1 = x_{\max};$$

$$f''(3) > 0 \Rightarrow 3 = x_{\min}.$$

Как поступить в случае, когда $f''(x_0) = 0$? В этом случае учитывают старшие производные, а именно:

Теорема 5. Пусть функция f имеет в точке x_0 – производные до порядка k включительно. Тогда если $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то

? при четном n точка x_0 является точкой экстремума, причем точкой максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$;

? при нечетном n экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство: разложим функцию f по формуле Тейлора до n -ого порядка:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta), \text{ т.к. } o(x - x_0)^n \rightarrow 0, \text{ то знак}$$

данного выражения определяет первое слагаемое.

1) n – нечетное число: $n = 2k + 1$. При переходе от значений x меньших, чем x_0 , к значениям, большим, чем x_0 , выражение $(x - x_0)^n > 0$ изменит знак на обратный, а так как знак первого множителя при этом не меняется, то и знак разности $f(x) - f(x_0)$ изменится. Таким образом, в точке x_0 функция $f(x)$ не может иметь экстремума, ибо вблизи этой точки принимает значения как меньшие, так и большие, чем $f(x_0)$.

2) n - четное число: $n = 2k$. В этом случае разность $f(x) - f(x_0)$ не меняет знака при переходе от x , меньших, чем x_0 , к большим, так как $(x - x_0)^n > 0$ при всех x . Очевидно, вблизи x_0 как слева так и справа знак разности $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком числа $f^{(n)}(x_0)$. Значит, если

? $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x) > f(x_0)$ вблизи точки x_0 , и в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум;

? $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) < f(x_0)$ вблизи точки x_0 , и в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке X , называется выпуклой вниз (выпуклой), если для любых точек x_1 и x_2 из X выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad (1)$$

каковы бы ни были положительные числа α_1 и α_2 , $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Функция $f(x)$, называется выпуклой вверх (вогнутой), если вместо (1) — имеем

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Приведенное определение выпуклой функции имеет простой геометрический смысл.

Обозначим через $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \Rightarrow f(x) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, где $x = \alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1)x_2 \Rightarrow$

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \text{ и } \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Отсюда имеем

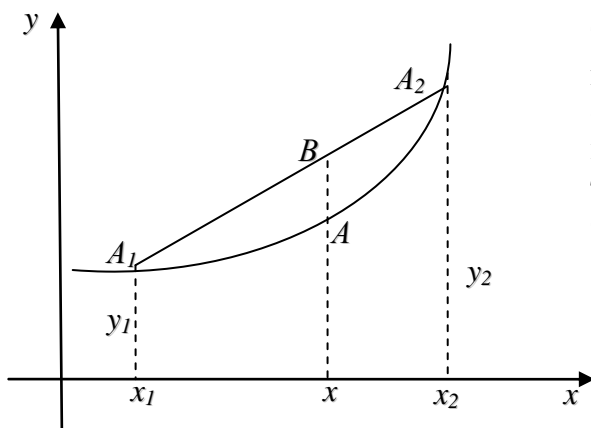
$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad (2)$$

$$x_1 < x < x_2, \text{ или } \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Если рассмотреть график функции $f(x)$ и его дугу между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, где $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то в левой части неравенства (1) при коэффициентах (2) — мы имеем ординату точки A дуги A_1A_2 с абсциссой x . В правой же части этого неравенства стоит ордината точки B хорды A_1A_2

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2 \quad (3)$$

с той же абсциссой.



Таким образом, выпуклая вниз функция характеризуется тем, что все точки любой дуги ее графика лежат под соответствующей хордой или на ней. В случае выпуклой вверх функции все точки любой дуги ее графика лежат над соответствующей хордой или на ней.

Теорема1. Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ была бы выпуклой необходимо и достаточно, чтобы производная функции $f'(x)$ была бы монотонно возрастающей.

Доказательство: допустим, что функция $f(x)$ – выпуклая функция, т.е. имеет место неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad (4)$$

докажем, что $f'(x) \uparrow$. Возьмем $\forall x_1, x_2$ и допустим, что $x_1 < x_2$, тогда из выпуклости функции следует, что $\forall x, x_1 < x < x_2$ имеет место неравенство (4). В неравенстве (4),

перейдя к пределу при $x \rightarrow x_1$, получим: $f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, $\forall x \in (x_1; x_2)$. Аналогично,

при $x \rightarrow x_2$, получим: $f'(x_2) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, $\forall x \in (x_1; x_2)$. Из того, что $x_1 < x_2$

$\Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$, т.е. из выпуклости функции, получили что монотонно возрастающая производная.

Пусть, теперь производная функции $f'(x) \uparrow$, покажем, что функция $f(x)$ – выпуклая функция. Доказать, что $f(x)$ выпуклая функция, это значит показать, что для $\forall x_1$ и x_2 , $x_1 < x < x_2$ имеет место неравенство (4). Для этого рассмотрим

$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ и $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ и применим к ним формулу Лагранжа:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ где}$$

$x_1 < \xi_1 < x, x < \xi_2 < x_2 \Rightarrow \xi_1 < \xi_2$, и т.к. $f'(x) \uparrow \Rightarrow f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ и следовательно

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Теорема2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в месте со своей производной $f'(x)$ промежутке X и имеет внутри него конечную вторую производную $f''(x)$. Для выпуклости вниз функции $f(x)$ в X необходимо и достаточно, чтобы внутри X было $f''(x) \geq 0$. Для выпуклости вверх функции аналогично получается $f''(x) \leq 0$.

Доказательство: доказательство получается из теоремы 1, с применением теоремы о монотонности дифференцируемой функции, т.е. $f'(x) \uparrow$, тогда и только тогда когда $f''(x) \geq 0$.

Теорема3. Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ была бы выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы касательная этой функции, проведенная через точку x_0 , была бы ниже графика функции.

Доказательство: пусть дифференцируемая функция $f(x)$ – выпуклая. Проведем через точку x_0 касательную: $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Для $\forall x$ покажем, что $f(x) \geq y(x)$.

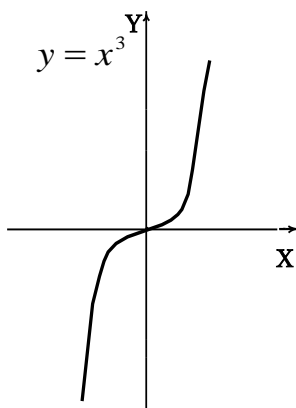
Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$

$$f(x) - y(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \geq 0 \text{ (т.к. функция выпуклая } f''(x) \geq 0 \text{)}. \text{ Ч.т.д.}$$

Отметим что выпуклая функция во внутренней точке не может принимать максимального значения, а вогнутая функция минимального.

ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Точка x_0 называется точкой перегиба функции, если в некоторой окрестности данной точки функция меняет направление выпуклости. Например, для функции $y = x^3$ точка $x_0 = 0$, называется точкой перегиба.



Необходимое условие для точки перегиба.

Если точка x_0 — точка перегиба для дифференцируемой функции, то $f''(x) = 0$.

Доказательство:

$$x < x_0, \quad f''(x) \leq 0 \\ \Rightarrow f''(x) = 0,$$

$$x > x_0, \quad f''(x) \geq 0$$

Это необходимое, но не достаточное условие для точки перегиба. Например, если рассмотреть функцию $f(x) = x^4$, то $f''(0) = 0$, но точка $x = 0$ — точка минимума, т.е. не является точкой перегиба.

Если же рассмотреть функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$, то точка $x = 0$ — является точкой перегиба, но в этой точке не существует вторая производная.

Необходимое и достаточное условие для точки перегиба.

Для того чтобы точка x_0 являлась точкой перегиба, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ существовали точки x_1 и x_2 , где $f''(x_1) \geq 0$, $f''(x_2) \leq 0$.

Доказательство: допустим, что находимся в $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f''(x) > 0$,
 $(x_0; x_0 + \delta)$ и $f''(x) < 0$.

По определению, точка x_0 является точкой перегиба.

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 .

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a; b]$ и

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, а также $\exists f'(a)$ и $g'(a)$ и $g'(a) \neq 0$, тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Доказательство: т.к. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $\exists f'(a)$ и $g'(a)$, то в точке $x = a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и следовательно $f(a) = g(a) = 0$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Теорема 2. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $(a; b]$, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0$, $g'(a) = 0$, $g''(a) = 0, \dots, g^{(n-1)}(a) = 0$, $g^{(n)}(a) \neq 0$, тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

Доказательство: разложим функцию $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора $f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \alpha(x)(x-a)^n$, $g(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \beta(x)(x-a)^n$, где $\alpha(x) = o(x-x_0)$ и $\beta(x) = o(x-x_0)$ и рассмотрим

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x) \right) (x-a)^n}{\left(\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \beta(x) \right) (x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \beta(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Теорема 3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a; +\infty)$ и $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ и $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, $\exists f'(x)$ и $g'(x)$, $g'(x) \neq 0$. Тогда если $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство: Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left. \begin{array}{l} \text{если } x \in [a; +\infty), \\ \text{то, } t \in \left(0; \frac{1}{a}\right] \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0$, аналогично

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0$. Применим теорему 1, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a; +\infty)$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, $\exists f'(x)$ и $g'(x)$, $g'(x) \neq 0$. Тогда если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 часто удается свести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований, а затем применить правило Лопиталя.

1) Пусть $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$. Тогда очевидны следующие

преобразования: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$ или

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

2) Пусть $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$. Тогда можно поступить так:

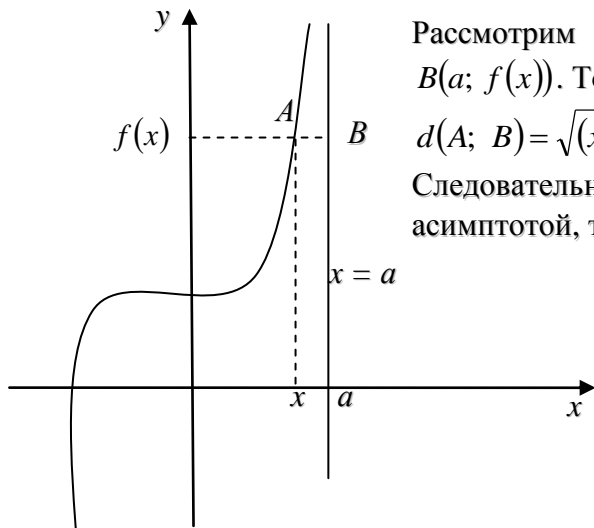
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{1/f(x)} - \frac{1}{1/g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \right] = \left[\frac{0}{0} \right].$$

3) Пусть или $f(x) \rightarrow 1$ и $g(x) \rightarrow \infty$, или $f(x) \rightarrow \infty$ и $g(x) \rightarrow 0$, или $f(x) \rightarrow 0$ и $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Для нахождения предела вида $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ удобно представить функцию $\varphi(x) = f(x)^{g(x)}$ в виде $\varphi(x) = e^{g(x)\ln f(x)}$.

АСИМПТОТЫ ФУНКЦИИ

Вертикальные асимптоты.

Определение. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой для функции $y = f(x)$, если $\lim_{\substack{x \rightarrow a+0 \\ \text{или} \\ x \rightarrow a-0}} f(x) = \pm\infty$. Вертикальные асимптоты бывают в окрестности точек разрыва второго рода.



Рассмотрим точки A и B с координатами $A(x; f(x))$ и $B(a; f(x))$. Тогда

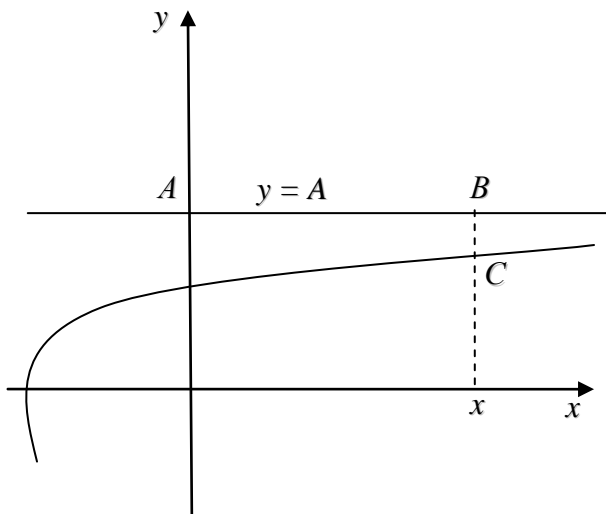
$$d(A; B) = \sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - f(x))^2} = |x-a| \rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow a.$$

Следовательно, если прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой, то $d(A; B) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$.

Горизонтальные асимптоты.

Определение. Прямая $y = A$ называется горизонтальной асимптотой для функции $y = f(x)$, если $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{или} \\ x \rightarrow -\infty}} f(x) = A$.

Рассмотрим точки C и B с координатами $C(x; f(x))$ и $B(x; A)$. Тогда $d(C; B) = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x)-A)^2} = |f(x)-A| \rightarrow 0$, при $x \rightarrow +\infty$, если прямая $y = A$ является горизонтальной асимптотой.



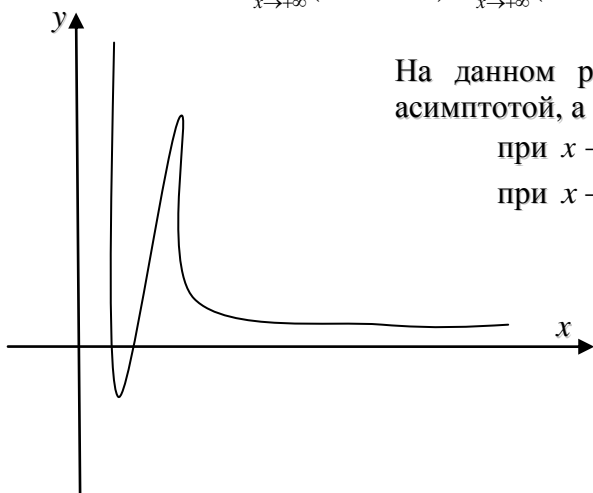
Наклонные асимптоты.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой для функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad (1)$$

где $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$, или $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$.
или $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0$.

Из данного определения следует, что если обе части (1) разделить на x , то получим $\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, где k – конечное число. Остается найти b . Рассмотрим предел разности $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + \alpha(x)) = b$. Следовательно, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$.



На данном рисунке ось абсцисс является горизонтальной асимптотой, а ось ординат – вертикальной;

при $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow +\infty$;

при $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 0$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x}$.

Решение.

1) Находим вертикальные асимптоты.

Точка $x = 0$ – точка разрыва II рода и $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty \Rightarrow$ ось ординат является вертикальной асимптотой.

2) Находим горизонтальные асимптоты.

Так как $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \left(2x - 5 + \frac{2}{x} \right) = \begin{cases} +\infty, & x \rightarrow +\infty \\ -\infty, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$, то отсюда следует, что

горизонтальных асимптот нет.

3) Находим наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 2,$$

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 2 - 2x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-5 + \frac{2}{x} \right) = -5 \quad \text{отсюда следует, что}$$

прямая $y = 2x - 5$ является наклонной асимптотой.

4) Находим точки пересечения графика с осью абсцисс.

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5x + 2}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,5 \\ x_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow (0,5; 0) \text{ и } (2; 0) \text{ точки пересечения}$$

графика функции с осью абсцисс.

5) Находим значения функции в точках максимума и минимума.

Так $x_{\min} = 1 \Rightarrow f(x_{\min}) = f(1) = -1$ и $x_{\max} = -1 \Rightarrow f(x_{\max}) = f(-1) = -9$.

Учитывая эти условия, можно построить график функции $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x}$:

