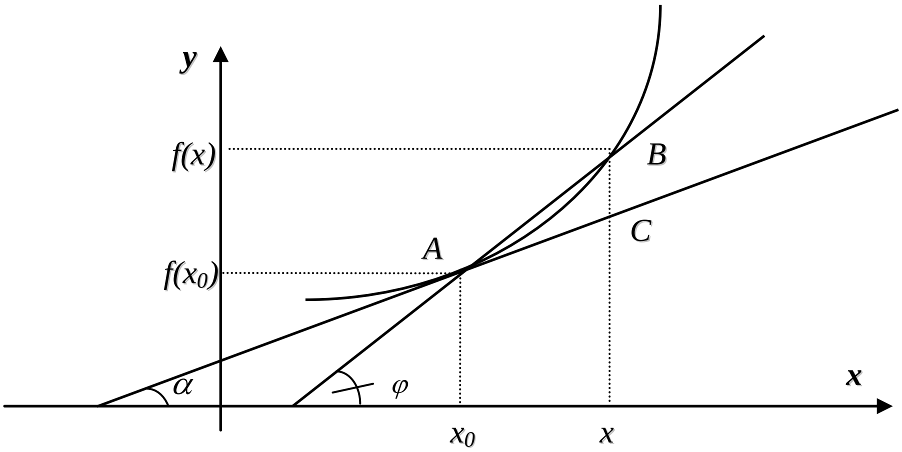
ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть имеем функцию $f(x)$, определенную на множестве X и пусть точка $x_0 \in X$ - внутренняя точка, т.е. точка для которой существует окрестность $(x_0-\delta;\ x_0+\delta) \subset X$. Возьмем любую точку $x \in (x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ и обозначим через $\Delta x = x - x_0$, а $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$.

$\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента, а $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ приращением функции.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 и называется следующий предел: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если этот предел существует и конечное число, и обозначают через $f'(x_0)$

Геометрический смысл производной. Пусть имеем функцию $y = f(x)$.



Рассмотрим прямую, проходящую через точку $A(x_0;\ f(x_0))$ и $B(x;\ f(x))$. Прямая *AB* называется секущей к кривой $y = f(x)$. Угловой коэффициент секущей *AB*, равен $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Обозначим через φ угол между секущей и положительным направлением оси OX. Тогда $tg\varphi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Угол φ зависит от x_0 и x. Если изменять x, а x_0 фиксировать, то φ будет меняться. Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi$, или, если существует предельное значение секущей, то это будет называется касательной, которая образует угол α с осью OX, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = tg\alpha$, тогда это число является угловым коэффициентом прямой, которая проходит через точки $(x_0;\ f(x_0))$. Т.е. $f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной, проходящей через точку с абсциссой x_0. Отсюда можно получить уравнение касательной. Касательной называется прямая $y = kx + b$ с угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$, проходящая через точку $(x_0;\ f(x_0))$. Таким образом, $y = f'(x_0)x + b$, $\qquad f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Rightarrow$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

Это уравнение касательной к кривой $y = kx + b$ с абсциссой x_0.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОИЗВОДНОЙ И НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ ФУНКЦИИ ФОРМУЛА ПОЛНОГО ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИИ

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (1)$$

где $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$.

Доказательство: если функция имеет производную в точке x_0 то имеет место: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$. Умножим обе части на Δx получим формулу (1): $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \alpha(\Delta x)\Delta x$. Из (1) $\Rightarrow$, что если для функции f существует производная в точке x_0, то в этой точке функция непрерывна.

Полученную формулу запишем следующим образом:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \beta(x) \quad (2),$$

где $\beta(x) = \alpha(x) \cdot \Delta x$, т.е. изменение функции в точке x_0 – произведение производной и аргумента. Формула (2) – называется формулой для приращений функции.

Следствие: если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0 (т.е. непрерывность функции в точке x_0 – это необходимое условие существования производной функции в точке x_0).

Доказательство:

Покажем, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Мы должны найти такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, |x - x_0| < \delta$. Т.к. $\beta(x) = o(\Delta x)$, допустим, что существует такая окрестность точки x_0, что $|\beta(x)| < |\Delta x|$. Тогда, если $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|f'(x_0)| + 1}$, то $|f(x) - f(x_0)| \le (1 + |f'(x_0)|) \cdot |\Delta x| = (1 + |f'(x_0)|) \cdot \delta = \varepsilon$. Это необходимое но не достаточное условие для существования производной.

ОДНОСТОРОННИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

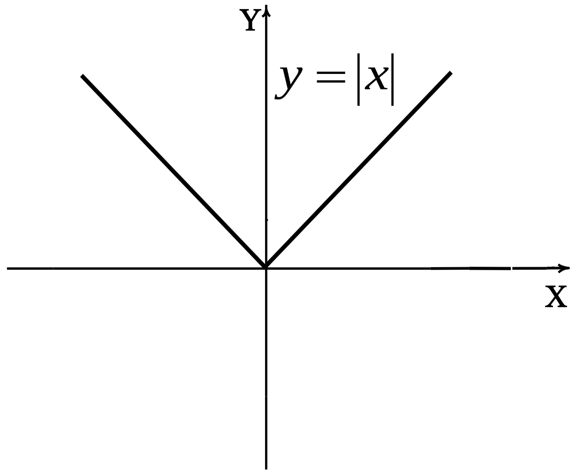
Если $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то понятие односторонних пределов, позволяет определить понятие односторонних производных:

$$f'(x_0+0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'(x_0-0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Для того, чтобы функция $f(x)$ имела производную в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние производные и равнялись между собой.

Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = |x|$.



$$f'(x_0+0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};\qquad f'(0+0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|-|0|}{x-0}=1;$$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};\qquad f'(0-0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|-|0|}{x-0}=-1,$$

т.е. односторонние производные существуют и не равны между собой, откуда следует, что функция в точке 0 не имеет производной.

Правила вычисления производной.

Рассмотрим функцию $f(x)$, и пусть она имеет производную в любой точке x. Тогда мы получим новую функцию $f'(x)$.

Пусть имеем функции $u(x)$ и $v(x)$, которые определены и на множестве X и имеют производные этом множестве, а c – любое постоянное число. Тогда:

1. $c\cdot u(x)$ тоже имеет производную на множестве X и $(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x)$:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{c\cdot u(x)-c\cdot u(x_0)}{x-x_0}=c\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}=c\cdot u'(x_0)\Rightarrow (c\cdot u(x))'\,|_{x=x_0}=c\cdot u'(x)\,|_{x=x_0}.$$
2. $u(x)\pm v(x)$ тоже имеет производную на множестве X и $(u(x)\pm v(x))' = u'(x)\pm v'(x)$:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)+v(x)-u(x_0)-v(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right]=u'(x_0)+v'(x_0)\Rightarrow$$
$$(u(x)+v(x))'\,|_{x=x_0}=u'(x)\,|_{x=x_0}+v'(x)\,|_{x=x_0}.$$
3. $u(x)\cdot v(x)$ тоже имеет производную на множестве X и $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)v(x)-u(x)v(x_0)}{x-x_0}+\frac{u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)(v(x)-v(x_0))}{x-x_0}+\frac{v(x_0)(u(x)-u(x_0))}{x-x_0}\right]=u(x_0)v'(x_0)+u'(x_0)v(x_0)\Rightarrow$$
$$(u(x)\cdot v(x))'\,|_{x=x_0}=u'(x)\cdot v(x)\,|_{x=x_0}+v'(x)u(x)\,|_{x=x_0}.$$

4. $\frac{u(x)}{v(x)}$ тоже имеет производную на множестве X и $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x_0) - v(x)u(x_0)}{(x - x_0)v(x)v(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{v(x_0)(u(x) - u(x_0))}{(x - x_0)v(x)v(x_0)} - \frac{u(x_0)(v(x) - v(x_0))}{(x - x_0)v(x)v(x_0)}\right] =$$

$$= \frac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{v^2(x_0)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' |_{x=x_0} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} |_{x=x_0}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция f определена на множестве A и принимает значения из B $(f : A \to B)$, а функция g определена на множестве B и принимает значения из C $(g : B \to C)$, тогда $h(x) = g(f(x))$ $(h : A \to C)$ называется сложной функцией.

Теорема. Если функция f имеет производную в точке x_0, а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, тогда функция h имеет производную в точке x_0 и $h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Доказательство: Рассмотрим приращение функции h:

$h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))$. Разделим обе части соотношения на Δx:

$$\frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если для функции f существует производная в точке x_0, то в этой точке функция непрерывна, т.е. $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Рассмотрим

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)} \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= g'(f(x_0))f'(x_0) = h'(x_0)$$

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

$f : A \to B$ и f – взаимно однозначная функция

$f^{-1} : B \to A$, и имеет место следующее тождество:

$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A.$. Так как $f^{-1}(f(x))$ сложная функция, то с применением формулы производной сложной функции получим:

$[f^{-1}(f(x))]' \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'}$. Таким образом, получим следующую теорему:

Теорема. Если для функции f существует производная $f'(x_0) \neq 0$, то для обратной функции f^{-1} существует $[f^{-1}(y_0)]'$ и $[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

ПРОИЗВОДНАЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $f(x)=const$,

тогда производная будет $f'(x)=0$;

2. $f(x)=x^n,\ n\in N$.

Производная будет $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)\left(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+...+x_0^{n-1}\right)}{x-x_0}=nx_0^{n-1}$.

$f'(x)=nx^{n-1}$.

ПРОИЗВОДНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. $f(x)=\sin x$,

тогда производная будет $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=\cos x_0$.

$f'(x)=\cos x$

2. Аналогично для функции $f(x)=\cos x$:

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=-\sin x_0$.

$f'(x)=\sin x$

3. $f(x)=tgx$,

тогда производная будет $f'(x)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

4. Аналогично для функции $f(x)=ctgx$:

$f'(x)=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. $f(x)=\arcsin x$,

т.к. $\sin(\arcsin x)=x,\ \forall x\in[-1;1]$, то

$[\sin(\arcsin x)]'=x'\Rightarrow\ \cos(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)'=1\Rightarrow\ (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. $f(x)=\arccos x$,

т.к. $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$, то

$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $f(x)=\mathrm{arc}\,tgx$,

т.к. $tg(\mathrm{arc}\,tgx)=x,\ \forall x\in R$, то

$[tg(\mathrm{arc}\,tgx)]'=x'\Rightarrow\ \dfrac{1}{\cos^2(\mathrm{arc}\,tgx)}\cdot(\mathrm{arc}\,tgx)'=1\Rightarrow\ (\mathrm{arc}\,tgx)'=\cos^2(\mathrm{arc}\,tgx)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

4. $f(x)=\operatorname{arc}\operatorname{c}tgx$,

т.к. $\operatorname{arc}tgx+\operatorname{arcc}tgx=\frac{\pi}{2}$, то

$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$.

ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

1. $f(x)=a^x$,

тогда производная будет

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{a^{x_0}\left(a^{x-x_0}-1\right)}{x-x_0}=a^{x_0}\ln a;$$

2.в частности, когда $f(x)=e^x$,

производная будет

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x_0}\left(e^{x-x_0}-1\right)}{x-x_0}=e^{x_0};$$

ПРОИЗВОДНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

1. $f(x)=\ln x$,

тогда производная будет

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{x-x_0}=\begin{vmatrix}x-x_0=t\\ x=x_0+t\\ t\to 0\end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t+x_0}{x_0}}{t}=\frac{1}{x_0}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{x_0}\right)}{\frac{t}{x_0}}=\frac{1}{x_0};$$

2. $f(x)=\log_a x$,

т.к. $f(x)=\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$

тогда производная будет

$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$.

ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

1. $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in R$

т.к. $f(x)=x^\alpha=e^{\ln x^\alpha}=e^{\alpha\ln x}$

тогда производная будет $f'(x)=e^{\alpha\ln x}\left(\alpha\ln x\right)'=\frac{\alpha}{x}e^{\ln x^\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}$.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Как известно $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-$ называется приращением функции в точке x_0.

Возникает вопрос можно ли приращение функции $\Delta f(x_0)$ представить в виде:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x), \qquad (1)$$

где $A-$некоторая постоянная.

Если имеет место (1), то функция $f(x)$ в точке x_0 называется дифференцируемой, а выражение $A \cdot \Delta x$, которая является главной частью приращения функции, – называется дифференциалом функции в точке x_0.

Теорема. Для того чтобы функция f была дифференцируема в точке x_0 необходимо и достаточно чтобы она имела производную в точке x_0 и $A = f'(x_0)$.

Доказательство:

пусть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = o(\Delta x) \Rightarrow$

$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\Delta x,$ где $A = f'(x_0)$.

Наоборот, пусть $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)\Delta x,$ т.е. функция дифференцируема в точке x_0. Покажем, что $\exists f'(x_0)$ *и* $f'(x_0) = A$.

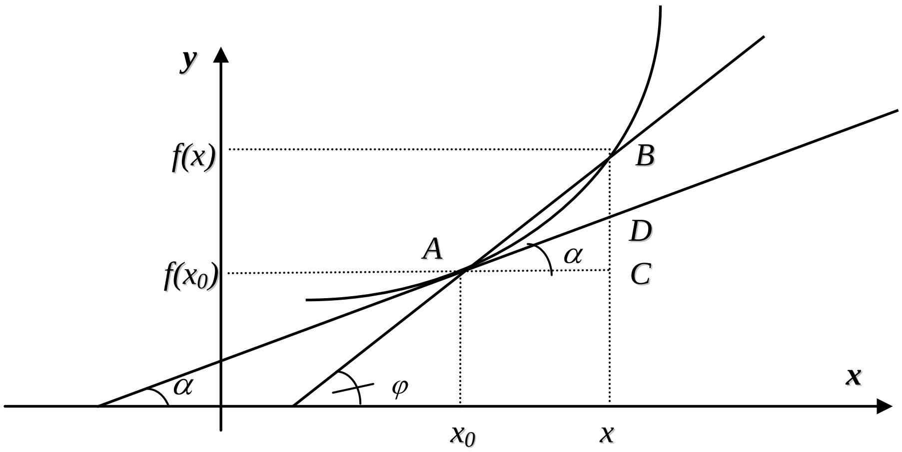
Обе части тождества (1) разделим на $\Delta x,$ получим $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ правая часть имеет предел, равный A, следовательно, левая часть тоже имеет предел, который равен $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = A$.

$\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(A + o(\Delta x)) = A \Rightarrow f'(x_0) = A$.

Таким образом, существование производной функции необходимое и достаточное условие для дифференцируемости, потому в дальнейшем функции которые имеют производную в точке x_0 называется дифференцируемой в точке x_0.

Главная часть приращения (1) называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$, где dx– любое приращение аргумента. Следовательно, дифференциал функции в точке – это линейная функция относительно приращения Δx.

Геометрический смысл дифференциала. Пусть имеем функцию $y = f(x)$.



$BC = \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, $AC = \Delta x$. Проведем касательную в точке A, которая пересекает BC в точке D. Тогда $DC = AC \cdot tg\alpha = f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0)$. $BD \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $BC \approx DC$. Это дает возможность посчитать приблизительно $\Delta f(x_0)$ по формуле $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Пример. $f(x) = x^3$;

$(x_0+\Delta x)^3-(x_0)^3=(x_0+\Delta x-x_0)\left(x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2+(x_0+\Delta x)x_0+x_0^2\right)=$
$=\Delta x\left(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2\right)=3x_0^2\Delta x+3x_0\Delta x^2+\Delta x^3\approx 3x_0^2\Delta x.$

Т.е. приращение в точке x_0 функции $f(x)=x^3$ приблизительно можно посчитать по формуле: $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x=3x_0^2\cdot\Delta x$.

ТЕОРЕМА ФЕРМА

Определение. Пусть имеем функцию f определенную на множестве X, и x_0 – внутренняя точка. Точка x_0 – называется точкой максимума (точкой минимума) функции f, если $\exists(x_0-\delta;\ x_0+\delta)\subset X$, что $\forall x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$). Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Теорема Ферма (необходимое условие для экстремума). Если внутренняя точка x_0 – является точкой экстремума для дифференцируемой функции f, тогда $f'(x_0)=0$.

Доказательство: т.к. точка x_0 – внутренняя точка, то $\exists(x_0-\delta;\ x_0+\delta)\subset X$. Если $\exists f'(x_0)$ то $\Rightarrow$ что односторонние производные тоже существуют и равны между собой. Допустим, что x_0 – точка максимума, т.е. $f(x)<f(x_0)$ $\forall x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$. Рассмотрим $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Если $x-x_0>0$ то $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. Это значит, что

$f'(x_0+0)=f'(x_0)\le 0$. (*)

Рассмотрим производную слева $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Т.к. $f(x)<f(x_0)$ и $x-x_0<0\Rightarrow$

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$. Следовательно, можно сказать, что

$f'(x_0-0)=f'(x_0)\ge 0$. (**)

Из (*) и (**) $\Rightarrow$ $f'(x_0)=0$. Ч.т.д.

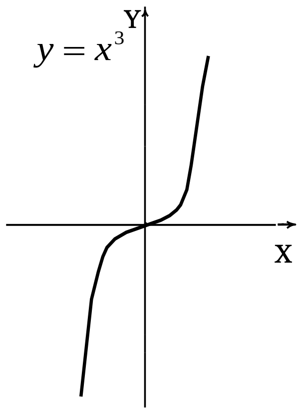
Замечание: Обозначим $A=\{x,\ f'(x)=0\}$. Для дифференцируемой функции – это множество, где находятся все точки экстремума функции. Множество A – называется множеством стационарных (критических) точек.

Графически это означает, что если точка x_0 – точка экстремума, то касательная, проведенная в точке x_0, параллельна оси OX, и следовательно $f'(x)=0$.

Эта теорема является необходимым, но не достаточным условием для существования экстремума.

Например, $y = x^3$.

$y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Точка $x = 0$ является критической точкой, но не является точкой экстремума, так как в окрестности этой точки функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.



ТЕОРЕМА РОЛЛЯ

Теорема Ролля. Пусть имеем функцию f, которая непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и имеет конечную производную на интервале $(a;\ b)$, а также на концах принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$. Тогда, существует такая точка $c \in (a;\ b)$, что $f'(c) = 0$

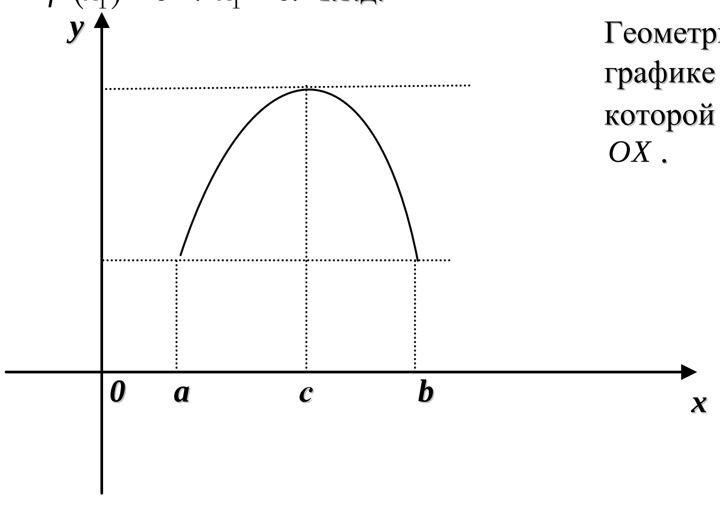
Замечание. Данная точка может быть не единственной.

Доказательство: По II теореме Вейерштрасса, если функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она принимает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке, т.е. существуют такие точки $x_1,\ x_2 \in [a;\ b]$, что $\max\limits_{x\in[a;\ b]} f(x) = f(x_1) = M$ и $\min\limits_{x\in[a;\ b]} f(x) = f(x_2) = m$.

Рассмотрим два случая:

1) Пусть $M = m \Rightarrow f(x) = const \Rightarrow f(x) = m \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow c -$ любая точка из $[a;\ b]$.

2) Пусть $M > m$. Т.к. $f(a) = f(b)$ и $M \neq m \Rightarrow$ что хотя бы одна из этих точек $x_1,\ x_2$ не совпадает с точками a и b. Допустим, что $x_1 \in (a;\ b)$ и внутренняя $x_1 -$ точка экстремума для дифференцируемой функции f. Из теоремы Ферма $\Rightarrow$ что, обязательно $f'(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = c$. Ч.т.д.



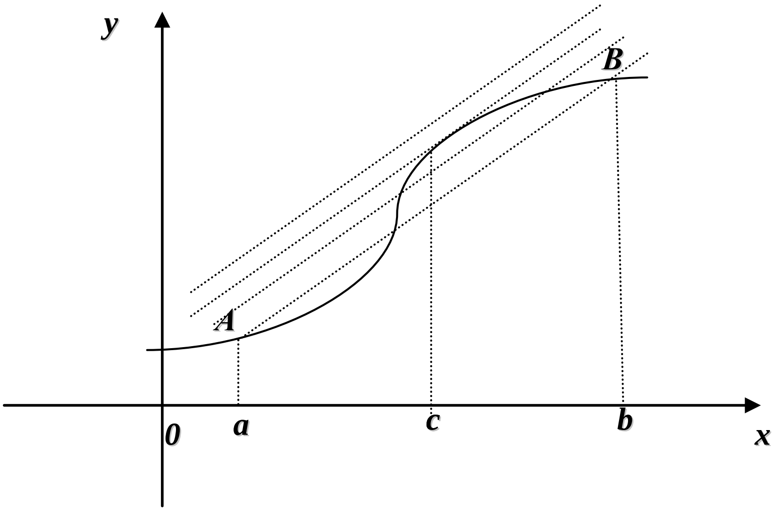
Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси OX.

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА ИЛИ ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

Теорема Лагранжа. Пусть имеем функцию f, которая определена и непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и существует конечная производная $f'(x)$ хотя бы на интервале $(a;\ b)$. Тогда, существует такая точка $c \in (a;\ b)$, что $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, $\exists F'(x)$, и $F(a) = 0$ *и* $F(b) = 0$. Следовательно, функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, т.е. $\exists c$, где $F'(c) = 0$. Посчитаем $F'(c)$:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$ Ч.т.д.



$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ отражает угловой коэффициент секущей, проходящей через точки A и B. Если эту прямую перемещать параллельно самой себе, то в какой-то момент эта прямая будет касательной к кривой.

ТЕОРЕМА КОШИ

Теорема Коши. Пусть имеем функции f *и* g, которые непрерывны на отрезке $[a;\ b]$ и существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$ для $\forall x \in [a;\ b]$. Тогда $\exists c \in (a;\ b)$, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство: сначала покажем, что $g(b) \neq g(a)$. Допустим, что $g(b) = g(a)$, тогда функция будет удовлетворять всем условиям теоремы Ролля, следовательно, $\exists c$, что $g'(c) = 0$, а это невозможно, т.к. $g'(x) \neq 0\ \forall x \in [a;\ b] \Rightarrow g(b) \neq g(a)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, как сумма двух непрерывных функций, $\exists F'(x)$, и $F(a) = 0$ *и* $F(b) = 0$. Следовательно функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, т.е. $\exists c$, где $F'(c) = 0$. Посчитаем $F'(c)$:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$ Ч.т.д.

Замечание. Теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа, если подобрать $g(x) = x$.

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, и пусть функция $f(x)$ в каждой точке X имеет конечную производную. Если в каждой точке вычислить производную функции $f(x)$, то получим новую функцию – $f'(x)$. Если же существует производная от функции $f'(x)$, то данную производную, называют производной второго порядка. Производную функции $f'(x)$ в точке x_0 обозначают $f''(x_0)$ (производная второго порядка в точке x_0) и называют следующий предел: $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$, если этот предел существует и конечное число.

Аналогичным образом определяется производная третьего порядка, и т.д. Если мы определили производную $n-1$- ого порядка, то производная n- ого порядка определяется следующим образом: $f^{n}(x)=\left[f^{n-1}(x)\right]'$.

Рассмотрим следующие функции:

1. Функция $f(x)=e^x$ имеет производную любого порядка: $f^{n}(x)=e^x$;

2. Для функции $f(x)=\sin x$ производная n- ого порядка определяется следующим образом: $f^{n}(x)=\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$;

3. Аналогично определяется производная n- ого порядка для функции $f(x)=\cos x$:

$f^{n}(x)=\cos^{(n)}x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$.

Правила вычисления производной n- ого порядка.

Пусть имеем функции $f(x)$ *и* $g(x)$, которые определены и на множестве X и имеют производные n- ого порядка на этом множестве, а c– любое постоянное число. Тогда: для функций $c\cdot f(x)$, $f(x)\pm g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$, тоже существуют производные n- ого порядка на множестве X и они определяется следующим образом:

5. $(c\cdot f(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$;
6. $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$;
7. $(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{k}(x)$ – формула Лейбница.

Дифференциал n- ого порядка.

Напомним, что для функции $f(x)$ дифференциал первого порядка, определяется следующим образом: $df(x)=f'(x)dx$, с его помощью определяется дифференциал второго порядка и высших порядков:

$d^2f(x)=d(df(x))=f''(x)dx^2$;

$d^nf(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right)=f^{n}(x)dx^n$.

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть имеем функцию многочлен $P_n(x)$ степени n:

$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$.

Преобразуем этот многочлен также в многочлен степени n относительно разности $x-x_0$, где x_0 – произвольное число, т.е. представим $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+...+A_n(x-x_0)^n. \qquad (*)$$

Для нахождения коэффициентов A_0, A_1, A_2, ..., A_n продифференцируем n раз равенство (*):

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2 + ... + nA_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 2\cdot 3A_3(x-x_0) + ... + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$P_n^{///}(x) = 2\cdot 3A_3 + 2\cdot 3\cdot 4A_4(x-x_0) + ... + n(n-1)(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3},$$

……………………………………………………………………………

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\,...\,2\cdot 1A_n.$$

Подставляя $x = x_0$ в полученные равенства и равенство (*), имеем:

$P_n(x_0) = A_0$, т.е. $A_0 = P_n(x_0)$,

$P_n'(x_0) = A_1$, т.е. $A_1 = \dfrac{P_n'(x_0)}{1!}$,

$P_n''(x_0) = 2A_2$, т.е. $A_2 = \dfrac{P_n''(x_0)}{2!}$,

$P_n^{///}(x_0) = 2\cdot 3A_3$, т.е. $A_3 = \dfrac{P_n^{///}(x_0)}{3!}$,

……………………………………………………………………………

$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)\,...\,2\cdot 1A_n$, т.е. $A_n = \dfrac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Подставляя найденные значения A_0, A_1, A_2, ..., A_n в равенство (*), получим:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (**)$$

т.е. коэффициент многочлена определяется через производную в точке x_0.

Формула (**) называется формулой Тейлора для многочлена $P_n(x)$ степени n.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть для функции $f(x)$, существуют производные n - ого порядка. Любой такой функции $f(x)$ сопоставим многочлен n- ого порядка.

$f(x) \sim f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ и обозначим через

$$r_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right)$$

Свойства $r_n(x)$:

1. $r_n(x)$ имеет производную до n- ого порядка включительно.
2. $r_n(x_0) = 0,\ r_n'(x_0) = 0,\ r_n''(x_0) = 0,\ ....,\ r_n^{(n)}(x_0) = 0.$

Лемма. Если функция $\varphi(x)$ имеет производную n- ого порядка в окрестности точки x_0 и $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = ... = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$, то $\varphi(x) = o(x-x_0)^n$.

Доказательство: доказательство проведем методом математической индукции.

Пусть $n = 1$, т.е. $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$. Докажем, что $\varphi(x) = o(x-x_0)^n$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\varphi'(x_0)=0.$$

Допустим, что лемма верна для n, докажем справедливость леммы для $n+1$.

Обозначим через $g(x)=\varphi'(x)$, тогда $g(x_0)=g'(x_0)=...=g^{(n)}(x_0)=0\Rightarrow$ по индукции, что $g(x)=o(x-x_0)^n$. Рассмотрим теперь

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi'(c)(x-x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(c)}{(x-x_0)^{n}}$$, где $x_0<c<x$. Так как

$g(x)=o(x-x_0)^n$, то $g(c)=o(c-x_0)^n$ и если $x\to x_0$, то c тоже стремится к x_0 $(c\to x_0)$, получим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(c)}{(x-x_0)^{n}}=\lim_{c\to x_0}\frac{g(c)}{(c-x_0)^{n}}=0 \Rightarrow g'(x)=\varphi^{(n+1)}(x)=o(x-x_0)^n.$$

Так как функция $r_n(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы, то можно сказать, что $r_n(x)=o(x-x_0)^n$. Таким образом для функции имеем следующее представление

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n \qquad (1)$$

Формула (1) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Формула Пеано имеет недостаток, т.к. в явном виде мы не знаем вид остаточного члена.

Лагранж получил другой вид для остаточного члена. Он показал, что если существует производная до n-ого порядка, то $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где c некоторая точка из интервала $(x_0;\, x)$, тем самым получил другую запись формулы Тейлора

$$\begin{aligned}f(x)=\ &f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\\&+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{aligned} \qquad (2)$$

Формула (3) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

При $x_0=0$ получается частный случай формулы Тейлора – формула Маклорана:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (3)$$

Разложение по формуле Тейлора для элементарных функций.

Запишем формулу Маклорана для функции $f(x)=e^x$. Находим производные этой функции: $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, … , $f^{(n+1)}(x)=e^x$. Так как $f(0)=e^0=1$, $f'(0)=e^0=1$, $f''(x)=e^0=1$, … , $f^{(n)}(0)=e^0=1$, $f^{(n+1)}(c)=e^c$, то по формуле (3) имеем:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

при $x=1$, $0<c<2$, $e^c<9$, оценим число e.

$$e-\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{9}{(n+1)!},$$

Ранее (при изучении числа e) мы получили более точную оценку $e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots+\frac{\Theta_n}{n!n}$, где $0<\Theta_n<1\Rightarrow \quad e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$.

Приведем разложения по формуле Маклорана некоторых других элементарных функций:

$$f(x)=\sin x,\quad f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),\quad f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}-1, & n=4m+3,\\ 0, & n=2m,\\ 1, & n=1+4m.\end{cases}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right);$$

$$f(x)=\cos x,\quad f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),\quad f^{(n)}(0)=\cos\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}-1, & n=4m+2,\\ 0, & n=2m+1,\\ 1, & n=4m.\end{cases}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right);$$

$$f(x)=\ln(x+1),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),$$

при $x=1$, $\ln 2\approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;

$$f(x)=(1+x)^{\alpha},$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right);$$

$$f(x)=arctgx,$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n}),$$

при $x=1$, $arctg1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$, и мы получим приближенное вычисление числа π.

ИЗУЧЕНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Промежутки монотонности

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;\ b]$, и имеет конечную производную на $[a;\ b]$.

Если

- ? $f'(x)>0$ на $[a;\ b]$, то $f(x)$ – возрастающая на $[a;\ b]$ функция;
- ? $f'(x)<0$ на $[a;\ b]$, то $f(x)$ – убывающая на $[a;\ b]$ функция;
- ? $f'(x)\geq 0$ на $[a;\ b]$, то $f(x)$ – неубывающая на $[a;\ b]$ функция;
- ? $f'(x)\leq 0$ на $[a;\ b]$, то $f(x)$ – невозрастающая на $[a;\ b]$ функция.

Доказательство: пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;\ b]$, и имеет конечную производную на $[a;\ b]$. Докажем, что если $f'(x)>0$ на $[a;\ b]$, то $f(x)$–

возрастающая на $[a;\ b]$ функция. Для $\forall x_1,\ x_2 \in [a;\ b]$ предположим, что $x_1 < x_2$. Все условия теоремы Лагранжа выполняются $\Rightarrow \exists c \in (x_1;\ x_2)$, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ (т.к. $f'(c) > 0,\ (x_2 - x_1) > 0$) $\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Ч.т.д.

Определение. Те промежутки, где функция только возрастает или только убывает, называются промежутками монотонности функции.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;\ b]$, и имеет конечную производную на $[a;\ b]$. Для того, чтобы функция $f(x)$ была бы постоянной, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a;\ b]$.

Доказательство: допустим что $f'(x) = 0$, и докажем, что $f(x)$ – постоянная функция. Для $\forall x_1,\ x_2 \in [a;\ b]$ предположим, что $x_1 < x_2$ и покажем, что $f(x_1) = f(x_2)$. Для разности $f(x_2) - f(x_1)$ применим формулу Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ т.к. $f'(c) = 0$. Ч.т.д.

Экстремумы функции

Определение. Пусть имеем функцию f определенную на множестве X, и x_0 – внутренняя точка. Точка x_0 – называется точкой максимума (точкой минимума) функции f, если $\exists (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta) \subset X$, что $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Необходимое условие экстремума

Из теоремы Ферма мы знаем, что если внутренняя точка x_0 – является точкой экстремума для дифференцируемой функции f, тогда $f'(x_0) = 0$. Если обозначим через A множество всех точек для которых $f'(x) = 0$, то из этой теоремы следует, что точки экстремума функции f нужно искать во множестве A. Множество A – называется множеством стационарных (критических) точек.

Достаточное условие экстремума (с помощью производной I-ого порядка).

Теорема 3. Пусть внутренняя точка x_0 – критическая точка для дифференцируемой функции f.

- ? Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$ (т.е. до точки x_0 возрастает, после точки x_0 убывает), тогда $x_0 = x_{\max}$.
- ? Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$ (т.е. до точки x_0 убывает, после точки x_0 возрастает), тогда $x_0 = x_{\min}$.
- ? Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, или если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, тогда точка x_0 не является ни максимумом ни минимумом.

Доказательство: пусть точка x_0 – критическая точка для дифференцируемой функции f и $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. К разности $f(x) - f(x_0)$ применим теорему Лагранжа:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \text{ где } c \in (x_0;\ x), \text{ при } x > x_0,$$
$$c \in (x;\ x_0), \text{ при } x < x_0.$$

Из условия, что $x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$, а из $f'(x) > 0 \Rightarrow f'(c) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$. Если $x > x_0$ $\Rightarrow x - x_0 > 0$, а из $f'(x) < 0 \Rightarrow f'(c) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow x_0 = x_{\max}$. Ч.т.д.

Достаточное условие экстремума (с помощью производных высшего порядка).

Теорема 4. Пусть точка x_0 – критическая точка для дифференцируемой функции f. Допустим, что для функции f существует производная II-ого порядка.

? Если $f''(x_0)<0$, тогда $x_0=x_{\max}$.

? Если $f''(x_0)>0$, тогда $x_0=x_{\min}$.

? Если $f''(x_0)=0$, то ответа нет.

Доказательство: разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора до второго порядка $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$, т.к. x_0 – критическая точка, то $f'(x_0)=0$ и $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$. Так как вторым слагаемым $o(x-x_0)^2$ можно пренебречь, то знак выражения справа определяется первым слагаемым. Так как $(x-x_0)^2>0$ при $x\neq x_0\Rightarrow$ что

? если $f''(x_0)>0$, тогда $f(x)-f(x_0)>0\Leftrightarrow f(x)>f(x_0)$ и тем самым $x_0=x_{\min}$;

? если $f''(x_0)<0$, тогда $f(x)-f(x_0)<0\Leftrightarrow f(x)<f(x_0)$ и тем самым $x_0=x_{\max}$;

? если $f''(x_0)=0$, то ответа нет.

Пример. $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-x^4+x^3+11$.

$$f'(x)=x^4-4x^3+3x^2,\quad x^4-4x^3+3x^2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=3\end{array}\right.$$

$f''(x)=4x^3-12x^2+6x$,

$f''(0)=0\Rightarrow$ что ответа нет;

$f''(1)<0\Rightarrow 1=x_{\max}$;

$f''(3)>0\Rightarrow 3=x_{\min}$.

Как поступить в случае, когда $f''(x_0)=0$? В этом случае учититывают старшие производные, а именно:

Теорема 5. Пусть функция f имеет в точке x_0 – производные до порядка k включительно. Тогда если $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ a\ \ f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то

? при четном n точка x_0 является точкой экстремума, причем точкой максимума, если $f^{(n)}(x_0)<0$, и точкой минимума, если $f^{(n)}(x_0)>0$;

? при нечетном n экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство: разложим функцию f по формуле Тейлора до n-ого порядка: $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$, $x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, т.к. $o(x-x_0)^n\to 0$, то знак данного выражения определяет первое слагаемое.

1) n- нечетное число: $n=2k+1$. При переходе от значений x меньших, чем x_0, к значениям, большим, чем x_0, выражение $(x-x_0)^n>0$ изменит знак на обратный, а так как знак первого множителя при этом не меняется, то и знак разности $f(x)-f(x_0)$ изменится. Таким образом, в точке x_0 функция $f(x)$ не может иметь экстремума, ибо вблизи этой точки принимает значения как меньшие, так и большие, чем $f(x_0)$.

2) n - четное число: $n = 2k$. В этом случае разность $f(x) - f(x_0)$ не меняет знака при переходе от x, меньших, чем x_0, к большим, так как $(x - x_0)^n > 0$ при всех x. Очевидно, вблизи x_0 как слева так и справа знак разности $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком числа $f^{(n)}(x_0)$. Значит, если

- ? $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x) > f(x_0)$ вблизи точки x_0, и в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум;
- ? $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) < f(x_0)$ вблизи точки x_0, и в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке X, называется выпуклой вниз (выпуклой), если для любых точек x_1 *и* x_2 из X выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \qquad (1)$$

каковы бы ни были положительные числа α_1 *и* α_2, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Функция $f(x)$, называется выпуклой вверх (вогнутой), если вместо (1)–имеем

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \ge \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Приведенное определение выпуклой функции имеет простой геометрический смысл. Обозначим через $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \Rightarrow f(x) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, где $x = \alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) x_2 \Rightarrow$

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \text{ и } \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Отсюда имеем

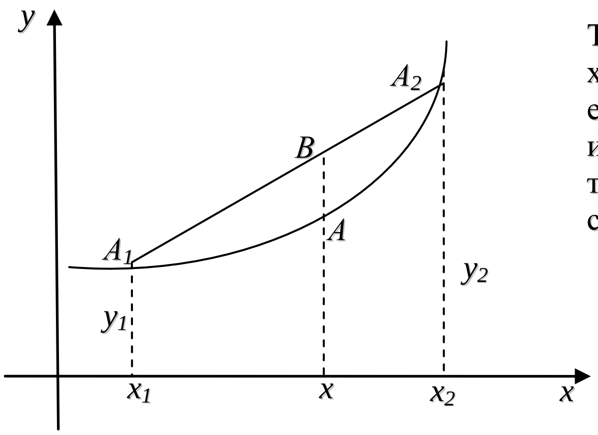
$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \qquad (2)$$

$x_1 < x < x_2$, или $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$.

Если рассмотреть график функции $f(x)$ и его дугу между точками $A_1(x_1, y_1)$ *и* $A_2(x_2, y_2)$, где $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то в левой части неравенства (1) при коэффициентах (2) – мы имеем ординату точки *A* дуги A_1A_2 с абсциссой x. В правой же части этого неравенства стоит ордината точки *B* хорды A_1A_2

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2 \qquad (3)$$

с той же абсциссой.



Таким образом, выпуклая вниз функция характеризуется тем, что все точки любой дуги ее графика лежат под соответствующей хордой или на ней. В случае выпуклой вниз функции все точки любой дуги ее графика лежат над соответствующей хордой или на ней.

Теорема1. Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ была бы выпуклой необходимо и достаточно, чтобы производная функции $f'(x)$ была бы монотонно возрастающей.

Доказательство: допустим, что функция $f(x)$ – выпуклая функция, т.е. имеет место неравенство

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \tag{4}$$

докажем, что $f'(x)\uparrow$. Возьмем $\forall x_1,\ x_2$ и допустим, что $x_1<x_2$, тогда из выпуклости функции следует, что $\forall x,\ x_1<x<x_2$ имеет место неравенство (4). В неравенстве (4), перейдя к пределу при $x\to x_1$, получим: $f'(x_1)\le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$, $\forall x\in(x_1;\,x_2)$. Аналогично, при $x\to x_2$, получим: $f'(x_2)\le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$, $\forall x\in(x_1;\,x_2)$. Из того, что $x_1<x_2$ $\Rightarrow f'(x_1)\le f(x_2)$, т.е. из выпуклости функции, получили что монотонно возрастающая производная.

Пусть, теперь производная функции $f'(x)\uparrow$, покажем, что функция $f(x)$ – выпуклая функция. Доказать, что $f(x)$ выпуклая функция, это значит показать, что для $\forall x_1$ *и* x_2, $x_1<x<x_2$ имеет место неравенство (4). Для этого рассмотрим $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ *и* $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ и применим к ним формулу Лагранжа: $f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$, $\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$, где

$x_1<\xi_1<x,\ \ x<\xi_2<x_2 \Rightarrow \xi_1<\xi_2$, и т.к. $f'(x)\uparrow\ \Rightarrow\ f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)$ и следовательно $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

Теорема2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в месте со своей производной $f'(x)$ промежутке X и имеет внутри него конечную вторую производную $f''(x)$. Для выпуклости вниз функции $f(x)$ в X необходимо и достаточно, чтобы внутри X было $f''(x)\ge 0$. Для выпуклости вверх функции аналогично получается $f''(x)\le 0$.

Доказательство: доказательство получается из теоремы 1, с применением теоремы о монотонности дифференцируемой функции, т.е. $f'(x)\uparrow$, тогда и только тогда когда $f''(x)\ge 0$.

Теорема3. Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ была бы выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы касательная этой функции, проведенная через точку x_0, была бы ниже графика функции.

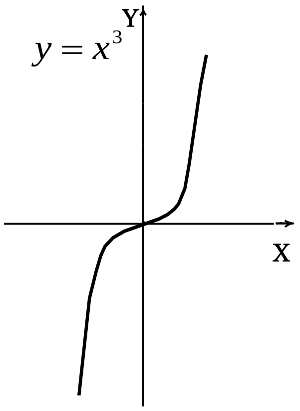
Доказательство: пусть дифференцируемая функция $f(x)$– выпуклая. Проведем через точку x_0 касательную: $y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Для $\forall x$ покажем, что $f(x)\ge y(x)$. Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$

$f(x)-y(x)=\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2\ge 0$ (т.к. функция выпуклая $f''(x)\ge 0$). Ч.т.д.

Отметим что выпуклая функция во внутренней точке не может принимать максимального значения, а вогнутая функция минимального.

ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Точка x_0 называется точкой перегиба функции, если в некоторой окрестности данной точки функция меняет направление выпуклости. Например, для функции $y = x^3$ точка $x_0 = 0$, называется точкой перегиба.



Необходимое условие для точки перегиба.

Если точка x_0 – точка перегиба для дифференцируемой функции, то $f''(x) = 0$.

Доказательство:

$x < x_0, \quad f''(x) \le 0$

$$\Rightarrow f''(x) = 0,$$

$x > x_0, \quad f''(x) \ge 0$

Это необходимое, но не достаточное условие для точки перегиба. Например, если рассмотреть функцию $f(x) = x^4$, то $f''(0) = 0$, но точка $x = 0$ – точка минимума, т.е не является точкой перегиба.

Если же рассмотреть функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$, то точка $x = 0$ –является точкой перегиба, но в этой точке не существует вторая производная.

Необходимое и достаточное условие для точки перегиба.

Для того чтобы точка x_0 являлась точкой перегиба, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ существовали точки x_1 *и* x_2, где $f''(x_1) \ge 0,\ f''(x_2) \le 0$.

Доказательство: допустим, что находимся в $(x_0 - \delta;\ x_0)$ и $f''(x) > 0$,

$(x_0;\ x_0 + \delta)$ и $f''(x) < 0$.

По определению, точка x_0 является точкой перегиба.

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ *и* $g(x)$ определены и непрерывны на $[a;\ b]$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, а также $\exists\, f'(a)$ *и* $g'(a)$ и $g'(a) \ne 0$, тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Доказательство: т.к. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $\exists f'(a)$ *и* $g'(a)$, то в точке $x=a$ функции $f(x)$ *и* $g(x)$ непрерывны и следовательно $f(a)=g(a)=0$, тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Теорема 2. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Если функции $f(x)$ *и* $g(x)$ определены и непрерывны на $(a;\ b]$, $f'(a)=0,$ $f''(a)=0, \ldots,$ $f^{(n-1)}(a)=0$, $g'(a)=0,$ $g''(a)=0, \ldots, g^{(n-1)}(a)=0,$ $g^{(n)}(a)\neq 0$, тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

Доказательство: разложим функцию $f(x)$ *и* $g(x)$ по формуле Тейлора $f(x)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\alpha(x)(x-a)^n$, $g(x)=\dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\beta(x)(x-a)^n$, где $\alpha(x)=o(x-x_0)$ *и* $\beta(x)=o(x-x_0)$ и рассмотрим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}+\alpha(x)\right)(x-a)^n}{\left(\dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}+\beta(x)\right)(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}+\alpha(x)}{\dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}+\beta(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Теорема 3. Пусть функции $f(x)$ *и* $g(x)$ определены и непрерывны на $[a;\ +\infty)$ и $\exists\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ *и* $\exists\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\exists f'(x)$ *и* $g'(x)$, $g'(x)\neq 0.$ Тогда если $\exists\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство: Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{t} \\ \text{если } x\in[a;\ +\infty), \\ \text{то},\ t\in\left(0;\ \dfrac{1}{a}\right] \end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 0} f\left(\dfrac{1}{t}\right)=0$, аналогично $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{t\to 0} g\left(\dfrac{1}{t}\right)=0$. Применим теорему 1, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 4. Пусть функции $f(x)$ *и* $g(x)$ определены и непрерывны на $[a;\ +\infty)$ и $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ *и* $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, $\exists f'(x)$ *и* $g'(x)$, $g'(x)\neq 0.$ Тогда если $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

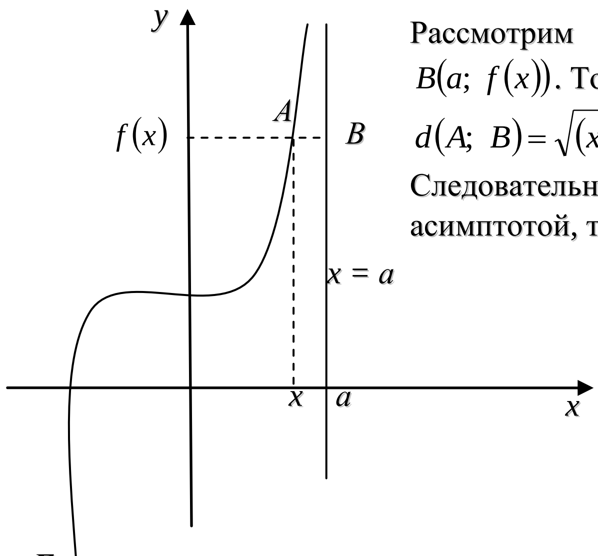
Замечание. Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} часто удается свести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований, а затем применить правило Лопиталя.

1) Пусть $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ при $x\to a$. Тогда очевидны следующие преобразования: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\left[0\cdot\infty\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{1/g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\left[0\cdot\infty\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.
2) Пусть $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ при $x\to a$. Тогда можно поступить так: $$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}\right]=\left[\frac{0}{0}\right].$$
3) Пусть или $f(x)\to 1$ и $g(x)\to\infty$, или $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to 0$, или $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ при $x\to a$. Для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ удобно представить функцию $\varphi(x)=f(x)^{g(x)}$ в виде $\varphi(x)=e^{g(x)\ln f(x)}$.

АСИМПТОТЫ ФУНКЦИИ

Вертикальные асимптоты.

Определение. Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой для функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ \text{или}\\ x\to a-0}}f(x)=\pm\infty$. Вертикальные асимптоты бывают в окрестности точек разрыва второго рода.

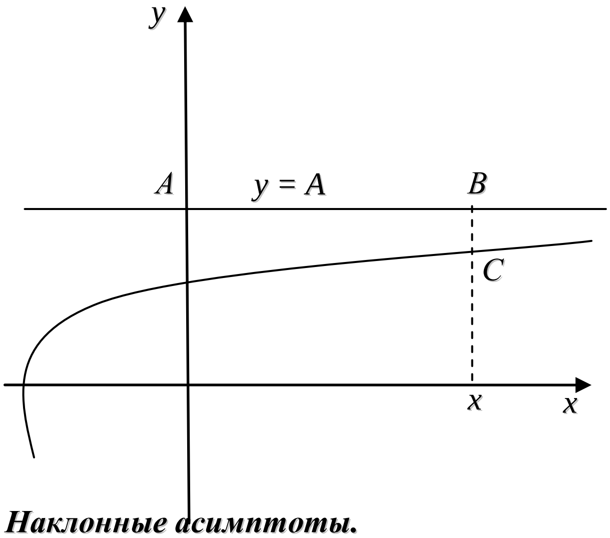


Рассмотрим точки A и B с координатами $A(x;\ f(x))$ и $B(a;\ f(x))$. Тогда $d(A;\ B)=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(x))^2}=|x-a|\to 0$, при $x\to a$. Следовательно, если прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой, то $d(A;\ B)\to 0$ при $x\to a$

Горизонтальные асимптоты.

Определение. Прямая $y=A$ называется горизонтальной асимптотой для функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ \text{или}\\ x\to-\infty}}f(x)=A$.

Рассмотрим точки C и B с координатами $C(x;\ f(x))$ и $B(x;\ A)$. Тогда $d(C;\ B)=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-A)^2}=|f(x)-A|\to 0,$ при $x\to+\infty$, если прямая $y=A$ является горизонтальной асимптотой.



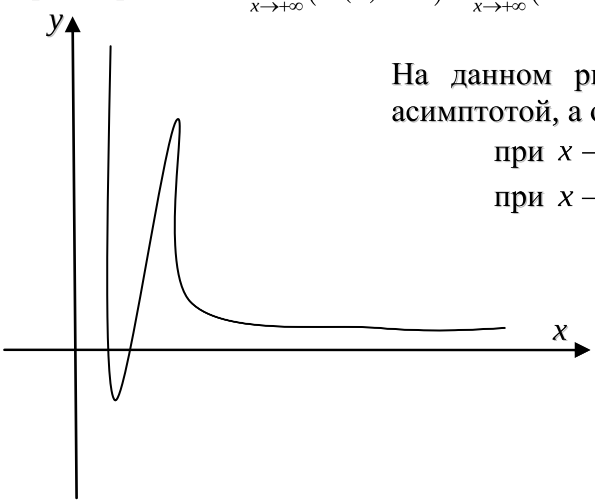
Наклонные асимптоты.

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой для функции $y=f(x)$, если эту функцию можно представить в виде:

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \qquad (1)$$

где $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ или\\ x\to-\infty}}\alpha(x)=0$, или $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$.

Из данного определения следует, что если обе части (1) разделить на x, то получим $\frac{f(x)}{x}=k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, где k – конечное число. Остается найти b. Рассмотрим предел разности $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(b+\alpha(x)\right)=b$. Следовательно, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$.



На данном рисунке ось абсцисс является горизонтальной асимптотой, а ось ординат – вертикальной;

при $x\to 0$, $f(x)\to+\infty$;

при $x\to+\infty$, $f(x)\to 0$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{2x^2-5x+2}{x}$.

Решение.

1) *Находим вертикальные асимптоты.*

Точка $x=0$-точка разрыва II рода и $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=-\infty\Rightarrow$ ось ординат является вертикальной асимптотой.

2) *Находим горизонтальные асимптоты.*

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\dfrac{2x^2-5x+2}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\left(2x-5+\dfrac{2}{x}\right)=\left[\begin{array}{l}+\infty,\ x\to+\infty\\-\infty,\ x\to-\infty\end{array}\right.$, то отсюда следует, что горизонтальных асимптот нет.

3) *Находим наклонные асимптоты.*

$k=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=2$,

$b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^2-5x+2-2x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-5+\dfrac{2}{x}\right)=-5$ отсюда следует, что прямая $y=2x-5$ является наклонной асимптотой.

4) *Находим точки пересечения графика с осью абсцисс.*

$y=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-5x+2}{x}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0,5\\x_2=2;\end{array}\right.\Rightarrow$ $(0,5;\ 0)$ *и* $(2;\ 0)$ точки пересечения графика функции с осью абсцисс.

5) *Находим значения функции в точках максимума и минимума.*

Так $x_{\min}=1\Rightarrow f(x_{\min})=f(1)=-1$ и $x_{\max}=-1\Rightarrow f(x_{\max})=f(-1)=-9$.

Учитывая эти условия, можно построить график функции $y=\dfrac{2x^2-5x+2}{x}$: