МНОЖЕСТВА

Множество. В математике понятие множество используется для описания совокупности предметов или объектов. При этом предполагается, что предметы (объекты) данной совокупности можно отличить друг от друга и от предметов, не входящих в эту совокупность.

Множества обычно обозначаются заглавными буквами ***A, B, X,...*** . Тот факт, что объект ***a*** является элементом множества ***A***, записывается так: $a \in A$ и читается «***a*** принадлежит множеству ***A***», «***a*** входит в множество ***A***». Запись $a \notin A$ означает, что ***a*** не является элементом множества ***A***.

Операции над множествами.

1.Объединение множеств.

Определение. Объединение множеств ***A*** и ***B*** есть множество ***C***, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств ($A \bigcup B = C$).

2.Пересечение множеств.

Определение. Пересечение множеств ***A*** и ***B*** есть множество ***C***, элементы которого принадлежат одновременно и ***A*** и ***B*** ($A \bigcap B = C$).

3.Разность множеств.

Определение. Разностью множеств ***A*** и ***B*** есть множество ***C***, элементы которого принадлежат ***A***, но не принадлежат ***B*** ($A \setminus B = C$).

4.Подмножества.

Определение. Множество ***A*** является подмножеством множества ***B,*** если любой элемент, принадлежащий множеству ***A*** принадлежит и множеству ***B*** : $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ ($A \subset B = C$).

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Множество натуральных чисел. Числа, употребляемые для счета, называются натуральными ($\mathrm{N} = \{1, 2, 3...\}$).

Множество целых чисел. Целые числа состоят из натуральных, нуля и чисел, противоположных натуральным ($\mathrm{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...\}$).

Множество рациональных чисел. Рациональными числами называются числа, которые представимы как $\frac{p}{q}$, где p – целое, а q – натуральное (**$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in Z,\ q \in N \right\}$**).

Операции сложения: $\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + mq}{qn} \in Q$.

Операция умножения: $\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn} \in Q$.

Свойства сложения:

1. $a, b \in Q \Rightarrow a + b = b + a$.
2. $0 \in Q \Rightarrow 0 + a = a + 0,\ a \in Q$.
3. $\forall a \in Q \Rightarrow -a \in Q$, что $a + (-a) = -a + a = 0$.
4. $\forall a, b \in Q$ существует и притом единственный $x \in Q$, так что $a + x = b \Rightarrow x = b - a$ (разность множеств).
5. Если $b = \frac{m}{n},\ a = \frac{p}{q}$, то $b - a = b + (-a) = \frac{m}{n} + \left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{mq - np}{nq}$.

Свойства умножения:

1. $a, b \in Q \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$.
2. $\forall a$ существует единичный элемент, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

3. $\forall a \in Q,\ a \neq 0$ существует такой элемент $b = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ (обратное ему), что $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

4. $\forall a,\ b \in Q\ a,\ b \neq 0$ существует такой элемент x, что $a \cdot x = b \Rightarrow x = b \cdot a^{-1} = b \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{b}{a}$.

5.Если $a = \dfrac{m}{n} \Rightarrow\ a^{-1} = \dfrac{n}{m}$.

МНОЖЕСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Всякое положительное рациональное число $\dfrac{p}{q}$ разлагается в бесконечную периодическую десятичную дробь.

Верно и обратное утверждение:

Любая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого положительного рационального числа $\dfrac{p}{q}$**.**

Всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь называется иррациональным числом.

Иррациональное число нельзя представить в виде дроби $\dfrac{p}{q}$ и обратно, каждое число не представимое в виде $\dfrac{p}{q}$ является иррациональным.

Множество всех рациональных и иррациональных чисел обозначается символом **R** и называется множеством действительных чисел.

Над множествами действительных чисел можно провести все те же операции, что и над множеством рациональных чисел.

МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Абсолютной величиной (или модулем) отрицательного числа называется положительное число, получаемое от перемены его знака (−) на обратный (+). Абсолютной величиной положительного числа (а также числа 0) называется само это число.

Определение модуля числа ***a*** дадим следующим способом: $|a| = \left[\begin{array}{ll} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{array}\right.$

Из этого определения видно, что модуль любого числа неотрицателен.

Основные свойства модуля 1. $|ab| = |a||b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

3. $|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$ 4. $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$

Геометрическая интерпретация модуля. Если точка ***A*** на числовой оси имеет координату ***a***, то расстояние от ***A*** до ***0*** равно $|a|$. Расстояние между точками ***A(a)*** и ***B(b)*** на прямой равно $|a-b|$.

ГРАНИЦЫ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть имеем числовое множество ***A***.

Определение. Множество A называется ограниченным сверху, если существует такое число $M \in R$, что $\forall a \in A$: $a \le M$. Число $M -$ называется верхней гранью множества ***A***. Очевидно, что если $M -$ верхняя грань, то любое число $N > M$ также является верхней гранью. Наименьшая из верхних граней – называется точной верхней гранью, которая обозначается: $\sup A$.

Определение. Множество A называется неограниченным сверху, если $\forall M \in R$ существует $a_0 \in A,\ \ a_0 > M$.

Определение. Множество A называется ограниченным снизу, если существует такое число $m \in R$, что $\forall a \in A$: $a \ge m$. Число $m -$ называется нижней гранью множества ***A***. Очевидно, что если $m -$ нижняя грань, то любое число $n < m$ также является нижней гранью. Наибольшая из нижних граней – называется точной нижней гранью, которая обозначается: $\inf A$.

Определение. Множество ***A*** неограниченно снизу, если

для $\forall m \in R$ существует $a_0 \in A,\ \ a_0 < m.$

Определение. Множество A называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу.

Возникает вопрос: всегда ли для ограниченных множеств существуют $\inf A$ и $\sup A$? На этот вопрос отвечает следующая теорема:

Теорема Дедекинда. Любое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет точную верхнюю грань, т.е. существует наименьший элемент среди верхних граней; и любое непустое ограниченное снизу числовое множество имеет точную нижнюю грань, т.е. существует наибольший элемент среди нижних граней.

Например: для множества $A = [-3; 12)$ существуют $\sup A$ и $\inf A$, также существует $\min A$, который совпадает $\inf A$ ($\sup A = 12,\ \inf A = \min A = -3$), но не существует $\max A$.

Если в множестве ***A*** существует максимальный элемент, то $\sup$ совпадает с максимумом.

Если в множестве ***A*** существует минимальный элемент, то $\inf$ совпадает с минимумом.

$\sup\{A\} = M \Leftrightarrow 1)\ M -$ верхняя грань, $\forall a \in A$: $a \le M$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists a' \in A$, что $a' > M - \varepsilon.$

$\inf\{A\} = m \Leftrightarrow 1)\ m -$ нижняя грань, $\forall a \in A$: $a \ge m$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists a' \in A$, что $a' < m + \varepsilon.$

Утверждения 1) свидетельствуют о том, что M и m являются одной из верхних и нижних граней.

Утверждения 2) свидетельствуют о том, что грань M является наименьшей и уменьшена быть не может; грань m является наибольшей и увеличена быть не может.

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорят, что определена числовая последовательность (или просто последовательность) $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$. Кратко ее обозначают символом $\{a_n\}$. a_n называется общим членом последовательности. И т.к. члены последовательности действительные числа, то можно внести понятие ограниченности и неограниченности для последовательности.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует такое число M, что $a_n \le M,\ \forall n = 1,\ 2,\ 3\ ...$.

Например: $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2+5}$.

Так как $\dfrac{2n+1}{n^2+5} \le \dfrac{2(n+1)}{n+1} \le 2 \Rightarrow$ что последовательность $\{a_n\}$ – ограничена сверху.

Последовательность $\{a_n\}$ не ограничена сверху, если: для $\forall M \ \exists l_0 \in N,$ что $a_{l_0} > M$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует такое число m, что $a_n \ge m, \ \forall n = 1,\ 2,\ 3 \ldots$.

Например: $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2+5}$.

Так как $\dfrac{2n+1}{n^2+5} > 0 \Rightarrow$ что последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу.

Последовательность $\{a_n\}$ не ограничена снизу, если: для $\forall m \ \exists l_0 \in N,$ что $a_{l_0} < m$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной последовательностью, если она ограничена и сверху и снизу, т.е.

$\exists M$ и m, что $m \le a_n \le M, \ \forall n = 1,\ 2,\ 3 \ldots,$ или

$\exists C > 0$, что $|a_n| \le C, \ \forall n = 1,\ 2,\ \ldots$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется неограниченной последовательностью, если

$\forall C > 0 \ \exists n \in N : |a_n| > C$.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим последовательность $\{\alpha_n\}$.

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.п.), если:

для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$, что для $\forall n > N$: $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, если существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для $\forall n > N(\varepsilon)$ (т.е. начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$), все члены будут находится в интервале $(-\varepsilon; \varepsilon)$ или вне интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ могут оказаться только конечные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$.

Например: $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство: возьмем любое положительное число ε. Последовательность $\{\alpha_n\}$– бесконечно малая, если $\left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon,$ а $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $N = N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$

$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = 10^{-3}$, тогда $\dfrac{1}{n} < 10^{-3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1000} \Leftrightarrow n > 1000$. Если $N = 1001$, то $\forall n > 1001 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1001} < \varepsilon$.

Последовательности $\alpha_n = \dfrac{2n+1}{n^2+5}$, $\beta_n = \dfrac{\sin n!}{n}$, $\gamma_n = \dfrac{1}{n+5}$ бесконечно малые последовательности.

Определение. Последовательность $\{\beta_n\}$– не является бесконечно малой, если: $\exists\varepsilon_0 > 0 \;\; \forall N, \; \exists n > N,$ что $|\beta_n| > \varepsilon_0$.

Например: $\alpha_n = \dfrac{5n}{n-1}$ – не является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство: возьмем $\varepsilon_0 = 1$.

$\dfrac{5n}{n-1} > \dfrac{5n}{n} = 5 > \varepsilon_0 = 1 \Rightarrow \{\alpha_n\}$– не является бесконечно малой последовательностью.

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1.Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство: пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$– бесконечно малые последовательности, т.е

для $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_1(\varepsilon)$, что для $\forall n > N_1(\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon$ и

$\exists N_2(\varepsilon)$, что для $\forall n > N_2(\varepsilon) : |\beta_n| < \varepsilon$.

Покажем, что последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ также бесконечно малая последовательность, т.е. для $\forall\varepsilon > 0$ нужно подобрать такое число $N(\varepsilon)$, что для $\forall n > N(\varepsilon) : |\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$.

Пусть для $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_1(\varepsilon)$, что для $\forall n > N_1(\varepsilon) : |\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (1)

$\exists N_2(\varepsilon)$, что для $\forall n > N_2(\varepsilon) : |\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (2).

Из свойства модуля действительного числа $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$.

Если $\forall n > N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = max\{N_1, N_2\}$, то (1) и (2) будут выполняться одновременно.

Следовательно, $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$ что последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$– бесконечно малая последовательность.

Следствие. Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.

2.Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство: пусть $\{a_n\}$ – бесконечно малая а $\{\beta_n\}$– ограниченная последовательности.

Покажем, что последовательность $\{a_n \cdot \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность, т.е. что для $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon)$, что для $\forall n > N(\varepsilon) : |a_n \cdot \beta_n| = |a_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon$.

Если $\{\beta_n\}$ – ограниченная последовательность, то $\exists M > 0$, что $|\beta_n| \le M$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.

Так как $\{a_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то для данного ε будет существовать $N(\varepsilon)$, что для $\forall n > N(\varepsilon) : |a_n| \le \dfrac{\varepsilon}{M}$. Для данного $N(\varepsilon)$ оценим $|a_n \cdot \beta_n|$;

$|a_n \cdot \beta_n| = |a_n| \cdot |\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$, для $\forall n > N(\varepsilon)$.

Замечание. Условие ограниченности последовательности $\{\beta_n\}$ существенно.

Например:

1) $a_n = \dfrac{1}{n}$ и $\beta_n = n$, тогда $\{a_n \cdot \beta_n\} = 1$ не является бесконечно малой последовательностью;

2) $a_n = \frac{1}{n^2}$ и $\beta_n = n$, тогда $\{a_n \cdot \beta_n\} = \frac{1}{n}$ является бесконечно малой последовательностью;

3) $a_n = \frac{1}{n}$ и $\beta_n = n^2$, тогда $\{a_n \cdot \beta_n\} = n$ не является бесконечно малой последовательностью.

Таким образом, если последовательность $\{a_n\}$ – бесконечно малая последовательность а $\{\beta_n\}$– произвольная последовательность, тогда последовательность $\{a_n \cdot \beta_n\}$ может быть произвольной.

3. Любая бесконечно малая последовательность ограниченная последовательность.
Доказательство: пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Докажем, что она ограничена, т.е. покажем, что

$\exists M > 0$, что $|\alpha_n| \le M$, $\forall n = 1, 2, \dots$.

Так как $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то

для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$, что для $\forall n > N$: $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда будет существовать $N(1)$, что для $\forall n > N(1)$: $|\alpha_n| < 1$ (3)

(т.е. $-1 < \alpha_n < 1$).

Пусть $M = \max\{1, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N(1)}|\}$. Покажем, что $\{\alpha_n\}$ ограничена числом M . Возьмем $\forall n \in N$;

а) $n \le N(1) \Rightarrow |\alpha_n| \le M$;

б) $n > N(1) \Rightarrow$ что выполняется неравенство (3)$\Rightarrow$ $|\alpha_n| \le M$.

Так как любая бесконечно малая последовательность ограничена, то из свойства 2 следует, что произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.

Определение. Последовательность $\{\beta_n\}$ называется бесконечно большой (б.б.п.), если:

для $\forall A > 0$ $\exists N = N(A)$, что для $\forall n > N$: $|\beta_n| > A$.

Например: последовательности $\beta_n = n$, $\gamma_n = (-1)^n \cdot n$, бесконечно большие последовательности.

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной.
Неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой.

Например: последовательность $1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots, 1, n, 1, n+1, \dots$ неограниченная, но не является бесконечно большой последовательностью (доказательство привести самостоятельно).

Определение. Последовательность $\{\beta_n\}$– не является бесконечно большой, если:

$\exists A_0 > 0$ $\forall N$, $\exists n > N$, что $|\beta_n| < A_0$.

Теорема (связь между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями). Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность и, начиная с некоторого номера, $\alpha_n \ne 0$, последовательность $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ будет бесконечно большой последовательностью. И наоборот, если $\{\beta_n\}$– бесконечно большая последовательность, то обязательно, начиная с некоторого номера $\beta_n \neq 0$ и $\frac{1}{\beta_n} = \alpha_n$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство: пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность и начиная с некоторого номера, $\alpha_n \neq 0$ следует что для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$, что для $\forall n > N(\varepsilon)$: $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Докажем, что $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ – бесконечно большая последовательность.

Возьмем $\forall A > 0$, и обозначим $\varepsilon = \frac{1}{A}$. Так как $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то для данного числа ε будет существовать $N(\varepsilon) = N(A)$, что для $\forall n > N(A)$: $|\alpha_n| < \varepsilon = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{|\alpha_n|} > A \Rightarrow |\beta_n| > A, \ \forall n > N(A)$.

Доказательство обратной теоремы: пусть $\{\beta_n\}$– бесконечно большая последовательность. Покажем, что существует $n_0, \forall n > n_0$, что $\beta_n \neq 0$. Т.к. $\{\beta_n\}$– бесконечно большая последовательность, то если $A = 1$, то $\exists n_0 = n_0(1) \ \forall n > n_0 \ |\beta_n| > A \Rightarrow \beta_n \neq 0$.

Следовательно, имеет смысл рассмотреть последовательность $\alpha_n = \frac{1}{\beta_n}$. Докажем, что $\{\alpha_n\}$– бесконечно малая последовательность. Для этого возьмем $\forall \varepsilon > 0$, и пусть $A = \frac{1}{\varepsilon}$.

Так как $\{\beta_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то для данного числа A будет существовать $N(A) = N(\varepsilon)$, что для $\forall n > N(\varepsilon)$: $|\beta_n| > A \Rightarrow \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon, \ \forall n > N(\varepsilon)$.

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство: $|a_n - a| < \varepsilon$.

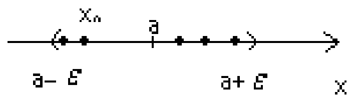
В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный числу a (или a_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к a.

Если обозначить $\alpha_n = a_n - a$, то $\{a_n\} \to a$ тогда и только тогда, когда α_n – б.м.п.

Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \alpha_n = a_n - a$, если α_n– б.м.п. Следовательно, бесконечно малые последовательности – это те последовательности, которые стремятся к нулю.

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности.

Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенствам $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, которые показывают, что элемент a_n находится в ε-окрестности точки a.



Поэтому определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения a_n, для которых $n > N$, попадут в ε-окрестность точки a. Вне окрестности могут оказаться лишь конечные члены данной последовательности.

Определение. Если последовательность имеет предел, то она называется сходящейся, в противном случае расходящейся.

Определение. Число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если $\exists \varepsilon > 0$, что $\forall N\ \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$.

СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то этот предел единственный.

Доказательство: допустим обратное, например что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ $(a \neq b,\ a > b)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon)$, что $\forall n > N_1(\varepsilon)$ $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, а

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon)$, что $\forall n > N_2(\varepsilon)$ $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$ и $N = \max\{N_1,\ N_2\}$. Тогда оба неравенства выполняются одновременно:

$$\begin{cases} a - \dfrac{a-b}{2} < a_n < a + \dfrac{a-b}{2} \\ b - \dfrac{a-b}{2} < a_n < b + \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} < a_n < \dfrac{3a-b}{2} \\ \dfrac{3b-a}{2} < a_n < \dfrac{a+b}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} < a_n < \dfrac{a+b}{2},$$

т.е. пришли к противоречию.

2. Любая сходящаяся последовательность ограничена, т.е. если последовательность имеет предел, то данная последовательность обязательно должна быть ограниченной.

Доказательство: пусть имеем последовательность $\{a_n\}$, имеющую предел a, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Доказать, что она ограниченна. Рассмотрим бесконечно малую последовательность $\alpha_n = a_n - a$ ($|\alpha_n| \leq M$, т.к. $\{\alpha_n\}$ – ограниченная последовательность, см. свойства б.м.п.). Пусть $|a_n| = |a_n + a - a| = |\alpha_n + a| \leq |\alpha_n| + |a| \leq M + |a|$, т.к. Пусть $M + |a| = E$, тогда $\forall n = 1, 2, \ldots$ $|a_n| \leq E$. Следовательно, последовательность $\{a_n\}$ – ограниченная.

Ограниченность последовательности – необходимое но недостаточное условие для сходимости.

Например: последовательность $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$ ограниченная, но не имеет предела (доказательство привести самостоятельно).

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД СХОДЯЩИМИСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

Рассмотрим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

1)если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, а c – любое постоянное число, то $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$.

Доказательство: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \alpha_n = a_n - a$ ($\{\alpha_n\}$ – б.м.п.); т.е доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot a$, означает, доказать что $\beta_n = c\cdot a_n - c\cdot a$ – б.м.п.: $c(a_n - a) = c\cdot\alpha_n$ – б.м.п.

2)если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$.

Доказательство: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \alpha_n = a_n - a$ ($\{\alpha_n\}$ – б.м.п.) и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow \beta_n = b_n - b$ ($\{\beta_n\}$ – б.м.п.) и пусть $a_n + b_n - (a+b) = \gamma_n$; т.е доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, означает, доказать что $\{\gamma_n\}$ – б.м.п.: $(a_n - a) + (b_n - b) = \alpha_n + \beta_n = \gamma_n$ – б.м.п.

3)если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$.

Доказательство: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \alpha_n = a_n - a$ ($\{\alpha_n\}$ – б.м.п.) и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow \beta_n = b_n - b$ ($\{\beta_n\}$ – б.м.п.) и пусть $a_n\cdot b_n - a\cdot b = \gamma_n$; т.е доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = a\cdot b$, означает, доказать что $\{\gamma_n\}$ – б.м.п.: $a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a) = (\alpha_n + a)\beta_n + b\alpha_n =$

$$= \underset{\text{б.м.п.}}{\underset{\downarrow}{\alpha_n\beta_n}} + \underset{\text{б.м.п.}}{\underset{\downarrow}{a\beta_n}} + \underset{\text{б.м.п.}}{\underset{\downarrow}{b\alpha_n}} = \gamma_n \Rightarrow \{\gamma_n\} \text{ – б.м.п.}$$

4) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $b \neq 0$, тогда $\exists n_0$, что $\forall n > n_0$, $b_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство: пусть $b > 0$. Обозначим $\varepsilon = \dfrac{b}{2} > 0$, тогда $\exists n_0$, что $\forall n > n_0$, $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad b_n > \dfrac{b}{2} \neq 0$. Рассмотрим $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} = \gamma_n$ и докажем, что $\{\gamma_n\}$ – б.м.п.:

$$\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + \alpha_n b - ab - \beta_n a}{b^2 + \beta_n b} = \underset{\text{огр.п.}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{b^2 + \beta_n b}}} \cdot \underset{\text{б.м.п.}}{\underset{\downarrow}{(\alpha_n b - \beta_n a)}} \Rightarrow \{\gamma_n\} \text{ – б.м.п.}$$

СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ВЫРАЖЕННЫХ НЕРАВЕНСТВАМИ

Свойство 1. Если члены сходящейся последовательности, начиная с некоторого номера n_0 не превосходят чем заданное число b, т.е. $a_n \leq b \ \ \forall n \geq n_0$, то предельное значение тоже не превосходит число b, т.е. $a \leq b$.

Доказательство: доказательство проведем от противного. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \leq b \ \ \forall n \geq n_0$, но $a > b$. Обозначим через $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$. Тогда из определению предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon)$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $\forall n > N_1(\varepsilon)$.

Пусть $N=\max\{N_1, n_0\}$. Тогда $\forall n>N$ и $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$ имеем:

$$a-\frac{a-b}{2}<a_n<a+\frac{a-b}{2} \quad \text{или} \quad a_n>\frac{a+b}{2}>b$$

т.к. по предположению $a>b$. Пришли к противоречию, т.к. $a_n\le b \quad \forall n\ge n_0$, а $N=\max\{N_1, n_0\}$. Свойство 1 доказано.

Замечание 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и начиная с некоторого номера n_0, $a_n\ge b$, $\forall n>n_0$ то $a\ge b$.

Замечание 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и начиная с некоторого номера n_0, $a_n<b$, $\forall n>n_0$ то нельзя утверждать, что $a<b$. *Например,* $a_n=-\dfrac{1}{n},\ b=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$, $a_n=-\dfrac{1}{n}<0$, но $a=b=0$.

Следствие. Пусть имеем две сходящиеся последовательности a_n *и* b_n , $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ и если начиная с некоторого номера n_0 $a_n\le b_n$, то $a\le b$.

Доказательство: рассмотрим последовательность $c_n=a_n-b_n$. Тогда начиная с некоторого номера n_0 $c_n\le 0$. $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a-b$, теперь остается к последовательности c_n применить **Свойство 1**, где $b=0$, $c_n\le 0$, следовательно $a-b\le 0$ или $a\le b$.

Замечание. Если $a_n<b_n \quad \forall n\ge n_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, то нельзя утверждать, что $a<b$. *Например,* $a_n=1-\dfrac{1}{n},\ b_n=1+\dfrac{1}{n}$, $a_n<b_n$, но $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1.$

Свойство 2.Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ и справедливо неравенство $x_n\le z_n\le y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

Доказательство: возьмем произвольный $\varepsilon>0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow \quad \exists N_1(\varepsilon)$, что при всех $n>N_1(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$; (1)

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\Rightarrow \quad \exists N_2(\varepsilon)$, что при всех $n>N_2(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства $a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$; (2)

Если обозначить через $N=\max\{N_1;\ N_2\}$, то (1) и (2) выполняются одновременно и можно написать следующие неравенства: $a-\varepsilon<x_n\le z_n\le y_n<a+\varepsilon$, $\forall n>N(\varepsilon)$ следовательно, $\{z_n\}$ имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧИСЛО e.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$, $n\in N$, называют возрастающей (неубывающей), если для любого $n\in N$, верно неравенство $a_{n+1}\ge a_n$.

Например: $a_n=1-\dfrac{1}{n}$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$, $n\in N$, называют убывающей (невозрастающей), если для любого $n\in N$, верно неравенство $a_{n+1}\le a_n$.

Например: $a_n=\dfrac{1}{n}$.

Если в этих определениях верны соответственно неравенства $a_{n+1} > a_n$ или $a_{n+1} < a_n$, то последовательность называют соответственно строго возрастающей или строго убывающей.

Возрастающую или убывающую последовательность называют монотонной (строго возрастающую или строго убывающую – строго монотонной).

Последовательность, может быть возрастающей начиная с номера n_0, если для любого $n \geq n_0$, $n \in N$, верно неравенство $a_{n+1} \geq a_n$ (аналогично, убывающей начиная с номера n_0, если для любого $n \geq n_0$, $n \in N$, верно неравенство $a_{n+1} \leq a_n$).

Теорема. Монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность – сходится; монотонно убывающая ограниченная снизу последовательность – сходится.

Доказательство: Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, т.е. $a_{n+1} \geq a_n$ и $\exists M,\ a_n \leq M,\ \forall n,\ n = 1, 2, \ldots$. Тогда по теореме Дедекинда, существует $\sup\{a_n\} = a$. Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Рассмотрим $a - \varepsilon$. Так как $a - \varepsilon$ не верхняя грань, то $\exists N(\varepsilon),\ a_N > a - \varepsilon$. Возьмем $\forall n > N$, тогда $a_n \geq a_N > a - \varepsilon$, значит $\forall \varepsilon > 0$ мы нашли такое число $N(\varepsilon)$, что $\forall n > N$ $a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

Число e. Рассмотрим последовательность $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Существует ли предел данной последовательности? Для ответа на этот вопрос воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n =$$

$$= \frac{n!}{0!(n-0)!} a^n b^0 + \frac{n!}{1!(n-1)!} a^{n-1} b^1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k + \ldots + \frac{n!}{n!(n-n)!} a^0 b^n =$$

$$= \frac{n!}{0!n!} a^n b^0 + \frac{(n-1)!n}{1!(n-1)!} a^{n-1} b^1 + \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{(n-k)!(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k + \ldots + \frac{n!}{n!0!} a^0 b^n =$$

$$= \frac{1}{0!} a^n b^0 + \frac{n}{1!} a^{n-1} b^1 + \frac{(n-1)n}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{k!} a^{n-k} b^k + \ldots + \frac{1}{0!} a^0 b^n, \text{ где } 0! = 1$$

Итак, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1 + \dfrac{n}{1!}\dfrac{1}{n} + \dfrac{(n-1)n}{2!}\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{(n-2)(n-1)n}{3!}\dfrac{1}{n^3} + \ldots + \dfrac{1\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{n!}\dfrac{1}{n^n} =$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = x_n.$$

Докажем, что $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастающая последовательность. Для этого рассмотрим $x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2!}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) + \dfrac{1}{3!}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right) + \ldots + \dfrac{1}{n!}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{n-1}{n+1}\right) +$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Так как $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \Rightarrow 1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1}$.

Второе слагаемое в разложении x_n получается меньше второго слагаемого в разложении x_{n+1}, третье слагаемое меньше – третьего, и т.д. Последнее слагаемое в разложении x_n меньше предпоследнего слагаемого в x_{n+1} и плюс ко всему в разложении x_{n+1} присутствует последнее положительное слагаемое. Можно сказать, что $x_n < x_{n+1}$ следовательно последовательность $\{x_n\}$ – монотонно возрастает. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху:

$$x_n = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<$$

$$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots=2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

(Здесь мы использовали, неравенство: $n! \geq 2^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Доказать самостоятельно).

Получили, что последовательность x_n монотонно возрастает и $2 < x_n < 3$ (x_n ограничено сверху числом 3, но это не супремум). Следовательно $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{обозначим}}{=} e$, где $e = 2{,}718281828\ldots$.

Обозначим через $y_n = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$, очевидно, что $x_n < y_n$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

Для этого рассмотрим $x_{n+m} = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+m}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+m}\right)\left(1-\frac{2}{n+m}\right)+\ldots+$

$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+m}\right)\left(1-\frac{2}{n+m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+m}\right)+\ldots+\frac{1}{(n+m)!}\left(1-\frac{n+m-1}{n+m}\right)=$($m$ устремим к ∞, получим)$=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \to e$. Число e можно записать в следующем виде:

$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots+\frac{\Theta_n}{n!n}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$, $e - y_n = \frac{\Theta_n}{n!n}$, где $0 < \Theta_n < 1 \Rightarrow \quad e \approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$.

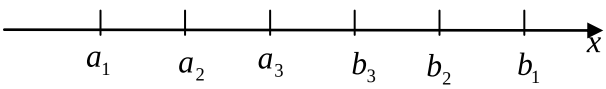
ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКАХ

Пусть имеем последовательность отрезков $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \ldots [a_n; b_n], \ldots$. Данная последовательность отрезков является последовательностью вложенных отрезков, если:

1. $[a_n; b_n]$ содержится в $[a_{n-1}; b_{n-1}]$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, т.е. длина данных отрезков стремится к нулю.

Теорема.1 Если имеем последовательность вложенных отрезков, то существует и притом одно единственное число c, принадлежащее всем отрезкам одновременно, т.е. $\exists! c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$.

Доказательство: рассмотрим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.



Последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. $\{a_n\}\uparrow,\ a_n \le b_1 \Rightarrow \exists c' \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c'$.

Последовательность $\{b_n\}$ монотонно убывающая и ограниченная снизу, т.е. $\{b_n\}\downarrow,\ b_n \ge a_1 \Rightarrow \exists c'' \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c''$.

Покажем, что c' и c'' совпадают. Рассмотрим разность $a_n - b_n$.

$0 = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c' - c'' \Rightarrow c' = c'' = c.$

Покажем, что число c, принадлежит всем отрезкам одновременно. Можем сказать, что $\sup a_n = c = \inf b_n \Rightarrow \forall n \in N,\ a_n \le c \le b_n$. Теперь докажем, что точка c- единственная. Пусть существует другая точка d, для которой: $a_n \le d \le b_n,\ \forall n \in N$ и допустим, что $d > c$, тогда $a_n \le c < d \le b_n$. Т.к. $b_n - a_n \to 0$ и $a_n \to c$, $b_n \to c \Rightarrow d = c$. Ч.т.д.

ПОДСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧАСТНЫЕ ПРЕДЕЛЫ.

Пусть имеем последовательность $\{a_n\}$. Возьмем некоторую монотонно возрастающую последовательность натуральных чисел: $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots n_k < \ldots$ и рассмотрим члены последовательности $\{a_n\}$ с индексами $n_1; n_2; n_3; \ldots; n_k \ldots$, т.е. $a_{n_1}; a_{n_2}; a_{n_3}; \ldots; a_{n_k} \ldots$. Полученная новая последовательность называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$ и обозначают $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

Например, все члены последовательности $a_n = (-1)^n$ при четных номерах равны 1, а при нечетных равны –1.

Определение. Если подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ последовательности $\{a_n\}$ имеет предел, то данный предел называется частным пределом последовательности $\{a_n\}$.

Последовательность может не иметь предел, но иметь частные пределы.

Например,

1) $a_n = (-1)^n$; при $n = 2k$ $a_{2k} = 1$ (частный предел 1); при $n = 2k-1$ $a_{2k-1} = -1$ (частный предел –1).

2) $a_n = n^2$ не имеет конечных частных пределов.

Теорема1. Если последовательность сходится (т.е. имеет предел), то любая ее подпоследовательность тоже сходится и сходится к тому же числу, что и сама последовательность, т.е. если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\forall \{x_{n_k}\} \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Доказательство: Рассмотрим произвольную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и докажем, что она сходится и сходится к числу a.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon);\ \forall n > N:\ |x_n - a| < \varepsilon$. Т.к. последовательность $n_k \uparrow$ и $\to \infty$, то $\exists k_0$, что $n_{k_0} > N(\varepsilon)$. Тогда $\forall k > k_0$, $n_k > n_{k_0} > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Ч.т.д.

Следовательно, сходящаяся последовательность имеет один единственный частный предел – предел последовательности.

Теорема 2. Если любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ сходится и сходится к одному и тому же числу a, то и сама последовательность сходится и сходится к числу a.

Доказательство очевидно, т.к. сама последовательность для себя является подпоследовательностью. Отсюда следует необходимое и достаточное условие для сходимости последовательностей.

Теорема 3. Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда любая подпоследовательность данной последовательности сходится, и сходится к одному и тому же пределу.

Пусть имеем последовательность $\{x_n\}$. Обозначим через A множество всех частных пределов. Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что если последовательность сходится, то множество A состоит из одной точки – это предел последовательности, а также если содержит более одной точки, то $\{x_n\}$– рассходится. Т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\Rightarrow$ что $A = \{a\}$.

Например, если

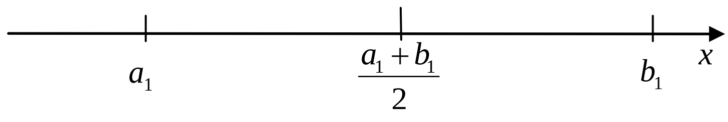
а) $x_n = \begin{cases} 0, & n = 3k \\ 1, & n = 3k+1 \\ 2, & n = 3k+2 \end{cases}$, то $A = \{0,\ 1,\ 2\}$;

б) $x_n = n^2$, то $A = \{\varnothing\}$, т.к. в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (т.е нет конечных частных пределов).

Следовательно, последовательность $\{a_n\}$ не сходится если: не имеет частных конечных пределов или имеет более одного конечного предела. Для этого следует рассматривать только ограниченные последовательности. Оказывается, для ограниченных последовательностей всегда существует конечный частный предел, т.е имеет место следующая теорема.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т.е. любая ограниченная последовательность имеет частный предел.

Доказательство: пусть имеем ограниченную последовательность $\{x_n\}$, т.е. $\exists a_1, b_1$, что $a_1 \le x_n \le b_1$. Разделим отрезок пополам и рассмотрим два отрезка $\left[a_1; \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_1+b_1}{2}; b_1\right]$.



Как минимум в одном из данных отрезков находится бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$. Действительно, если это не так, то в обоих отрезках существуют конечные члены данной последовательности. Допустим, что в первом отрезке существуют k членов, а во втором r членов, следовательно, в обоих отрезках существуют $k+r$ членов, откуда следует, что последовательность состоит из $(k+r)$ членов, а ведь последовательность $\{x_n\}$состоит из бесконечного числа элементов. Пришли к противоречию. Обозначим через $[a_2; b_2]$ данный отрезок (т.е. либо первый отрезок либо второй, т.е тот отрезок где находится бесконечное множество членов последовательности). Разделим его пополам. Опять, как минимум в одном из данных отрезков будут существовать бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим данный отрезок через $[a_3; b_3]$ и продолжим этот процесс до бесконечности. И тем самым получим, что $[a_1; b_1]$ содержит в себе $[a_2; b_2]$, а этот отрезок содержит – $[a_3; b_3]$, и т.д., а из построения следует, что $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^n} \to 0$. Следовательно, выполняются все условия теоремы о вложенных отрезках: существует, и притом единственная точка $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$.

Построим подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ следующим образом: возьмем отрезки $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, ... , $[a_k; b_k]$ и рассмотрим $x_{n_1} \in [a_1; b_1]$, $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$, ..., $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$, где $n_2 > n_1$, ..., $n_k > n_{k-1}$. Получим последовательность $\{x_{n_k}\}$, где $a_k \le x_{n_k} \le b_k$. Возьмем точку c, $a_k < c < b_k, \forall k \in N$. Тогда, можно сказать, что $\left|x_{n_k} - c\right| < \left|b_k - a_k\right| \Rightarrow \left|x_{n_k} - c\right| < b_k - a_k$, а т.к. $b_k - a_k \to 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0$, если $k > k_0$, то $b_k - a_k < \varepsilon$, для $\forall k > k_0$. Следовательно, $\left|x_{n_k} - c\right| < \varepsilon,\ \forall k > k_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ БОЛЬЦАНО-КОШИ ДЛЯ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теорема. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall p = 1, 2, \ldots$: $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$, или

для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall m > N(\varepsilon)$: $\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$.

Доказательство.

Необходимость: пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Докажем, что данное условие выполняется. Для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$: $\left|x_n - x\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Для $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall p = 1, 2, \ldots$ рассмотрим $\left|x_{n+p} - x_n\right| \le \left|x_{n+p} - x\right| + \left|x - x_n\right|$.

$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow n + p > N(\varepsilon) \Rightarrow \left|x_{n+p} - x\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\left|x - x_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|x_{n+p} - x\right| + \left|x - x_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ч.т.д.

Достаточность: докажем, что последовательность, удовлетворяющая этим условиям, ограниченная. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N_1$, что $\forall n \ge N_1$ $\left|x_{n+p} - x_n\right| < 1$, если $n = N_1$, то $x_{N_1} - 1 < x_{N_1+p} < x_{N_1} + 1$, $\forall p = 1, 2, \ldots$. Если взять $M = \max\left\{\left|x_1\right|, \ldots, \left|x_{N_1}\right|, \ldots, \left|x_{N_1}\right| + 1\right\}$, то $\forall n \in N$, $\left|x_n\right| \le M \Rightarrow$ последовательность ограниченна. Следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить $\{x_{n_k}\}$, которая стремится к x, т.е. сходящуюся последовательность. Докажем, что сама последовательность тоже сходится и сходится к числу x. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, по которому определяется такой $N_1(\varepsilon)$, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_{k_0}$, что $\forall n_k > N_{k_0}$: $\left|x_{n_k} - x\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Возьмем

$N=\max\{N_1, N_{k_0}\}$, тогда оба неравенства будут выполняться одновременно. Возьмем $\forall n>N$ и оценим $|x_n - x|$, т.к. $n_k \to +\infty$, то $\exists n_{k_0} > n$, тогда $|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \le$ $\le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (т.к. $n_k > n$, то можем взять $n_k = n+p$). Следовательно мы доказали, что для $\forall \varepsilon > 0$ и для $\forall n > N$ $|x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow$, что последовательность сходится. Ч.т.д.

Пример.1. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, т.е. показать, что для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall p = 1, 2, \ldots$: $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Доказательство: пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное. Тогда $|x_{n+p} - x_n| =$

$$=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+1)}+\frac{1}{(n+2)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)(n+p)} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} <$$

$$< \frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)}-\frac{1}{(n+p)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{(n+p)} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$ для $\forall n > \frac{1}{\varepsilon}$ и для $\forall p = 1, 2, \ldots$.

Определение. Последовательность, для которой выполняется условие Больцано-Коши, называется фундаментальной последовательностью. Следовательно, для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Отрицание понятия фундаментальности: последовательность $\{x_n\}$ нефундаментальна, если $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall N$, $\exists n > N$ и $\exists p = 1, 2, \ldots$ что: $|x_{n+p} - x_n| > \varepsilon_0$.

Пример.2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, т.е. показать, что $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall N$, $\exists n > N$ и $\exists p = 1, 2, \ldots$ что: $|x_{n+p} - x_n| > \varepsilon_0$.

Доказательство: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right| > \frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+\ldots+\frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p},$$ и при $p=n$ получим $|x_{n+p} - x_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$, для всех n последовательность расходится, где ε_0 – произвольное число из интервала $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.